Musterlösung Serie 18

Diagonalizabiltiy, Cayley-Hamilton

1. Seien K ein Körper und $n \geqslant 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K).$$

Beweise

$$\mathrm{char}_A(X) = (-1)^n(X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0).$$

Tipp: Benutze Induktion.

Solution: Wir bemerken für $n = 2$:

$$\det\begin{pmatrix} -X & -c_0 \\ 1 & -X - c_1 \end{pmatrix} = X^2 + c_1X + c_0 = (-1)^2(X^2 + c_1X + c_0).$$

Sei nun $n \geqslant 3$ und nehme an, dass die Aussage für $n - 1$ bewiesen ist. Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - c_{n-1} \end{pmatrix} \\
= \quad & (-X)\det\begin{pmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -X - c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}(-c_0) \\
= \quad & (-X)(-1)^{n-1}(X^{n-1} + c_{n-1}X^{n-2} + \cdots + c_1) + (-1)^n c_0 \\
= \quad & (-1)^n(X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0).
\end{aligned}$$

2. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r+1$ ist.

   Lösung: Nach der Definition des Rangs ist das Bild von L_A ein Unterraum der Dimension r. Betrachte die Einschränkung

$$F := L_A|_{\mathrm{Bild}(L_A)} : \mathrm{Bild}(L_A) \to \mathrm{Bild}(L_A).$$

   Das charakteristische Polynom $q(X) := \mathrm{char}_F(X)$ von F hat Grad r und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $q(F) = 0$.

   Für $p(X) := q(X) \cdot X$ folgt für alle $v \in K^n$

$$p(L_A)(v) = (q(L_A) \circ L_A)(v) = q(L_A)(Av) = q(F)(Av) = 0,$$

   also $p(L_A) = 0$, also $p(A) = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom von A das Polynom $p(X)$. Folglich ist der Grad des ersteren kleiner oder gleich dem Grad von $p(X)$, also kleiner oder gleich $r+1$.

3. Zeige, dass jede reelle invertierbare 2×2 Matrix eine der folgenden Eigenschaften erfüllt

   - die Matrix ist diagonalisierbar;
   - die Matrix ist triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1;
   - man kann eine Basis finden, so dass die Matrixdarstellung in dieser Basis durch
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } b \neq 0$$
     gegeben ist.

   Solution: Wir bemerken zunächst, dass das charakteristische Polynom p einer solchen Matrix ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten ist. Wenn beide seiner Nullstellen reell sind, zerfällt es über $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren. Dann ist entweder

   - die Matrix diagonalisierbar, wenn für jede Nullstelle die algebraische Multiplizität gleich der geometrischen Multiplizität ist; oder
   - die Matrix triagonalisierbar mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1.

   Betrachten wir nun den Fall, in dem das Polynom über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle λ. Schreibe $p(X) = X^2 + c_1X + c_0$. Aus $p(\lambda) = 0$ folgt

$$0 = \overline{p(\lambda)} = \overline{\lambda^2 + c_1\lambda + c_0} = (\overline{\lambda})^2 + c_1\overline{\lambda} + c_0 = p(\overline{\lambda}),$$

da die Koeffizienten von p reell sind. Also ist die komplexe Konjugation von λ die andere Nullstelle von p. Es bleibt zu zeigen, dass jedes solche charachteristische Polynom von einer Rotationsmatrix stammt. Dazu zeigen wir:

Theorem. *Sei A eine 2×2 relle Matrix mit komplexem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, und sei v ein komplexer Eigenvektor zu λ. Dann gilt $A = CBC^{-1}$ für*

$$C = \begin{pmatrix} | & | \\ \Re(v) & \operatorname{Im}(v) \\ | & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \operatorname{Im}(\lambda) \\ -\operatorname{Im}(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Re \begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, dass $\Re(v)$ und $\operatorname{Im}(v)$ linear unabhängig sind, um zu beweisen, dass C invertierbar ist. Wenn nicht, so existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x\Re(v) + y\operatorname{Im}(v) = 0$. Dann wäre

$$\begin{aligned} (y+ix)v &= y\Re(v) - x\operatorname{Im}(v) + i(x\Re(v) + y\operatorname{Im}(v)) \\ &= y\Re(v) - x\operatorname{Im}(v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Auf der einen Seite wäre $y\Re(v) - x\operatorname{Im}(v)$ also ein komplexes Vielfaches von v, und somit ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Andererseits wäre es ein reeller Eigenvektor von A, und da A reell ist, müsste es zu einem reellen Eigenwert korrespondieren. Dies ist ein Widerspruch.

Seien $\lambda = a + ib$ und $v = \left(\begin{smallmatrix} x+iy \\ z+iw \end{smallmatrix}\right)$. Da $\{\Re(v), \operatorname{Im}(v)\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet, gilt

$$CBC^{-1} = A \Longleftrightarrow \begin{cases} A\Re(v) &= CBC^{-1}\Re(v) \\ A\operatorname{Im}(v) &= CBC^{-1}\operatorname{Im}(v) \end{cases}$$

Auf der einen Seite ist

$$\begin{aligned} A\Re(v) + iA\operatorname{Im}(v) &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (a+ib)\begin{pmatrix} x+iy \\ z+iw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-by \\ az-bw \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} bx+ay \\ bz+aw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$Ce_1 = \Re(v) \Leftrightarrow e_1 = C^{-1}\Re(v) \Leftrightarrow CBe_1 = CBC^{-1}\Re(v)$$

and similarly replacing e_1 by e_2 and $\Re(v)$ by $\mathrm{Im}(v)$. Also folgt

$$CBC^{-1}\Re(v) = CBe_1 = C\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ az - bw \end{pmatrix} = A\Re(v)$$

und genauso $CBC^{-1}\,\mathrm{Im}(v) = A\,\mathrm{Im}(v)$. $\square$

4. Seien K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$ und sei $p \in K[X]$ ein nicht-triviales Polynom, sodass $p(A) = 0$ ist. Zeige, dass jeder eigenwert von A eine Nullstele von p ist.

   Tipp: Beobachte und beweise für einen eigenvektor v von A und ein Polynom q über K die Beziehung zwischen v und $q(A)\cdot v$.

   Solution: Wir gehen wie im Tipp schreiben und betrachten $q(A)\cdot v$ für ein nicht-triviales Polynom

$$q(X) = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0 \in K[X]$$

   und einen Eigenvektor v von A. Dann gilt

$$\begin{aligned} q(A)\cdot v &= b_nA^n\cdot v + b_{n-1}A^{n-1}\cdot v + \cdots + b_0I_n\cdot v \\ &= b_n\lambda^n v + b_{n-1}\lambda^{n-1}v + \cdots + b_0v \\ &= (b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_0)v \end{aligned}$$

   Nehme jetzt an, dass für $p(X) = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0 \in K[X] \setminus \{0\}$ die Gleichung $p(A) = 0$ gilt. Dann ist

$$(c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0)v = p(A)\cdot v = 0.$$

   Also folgt $c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, d.h. λ ist eine Nullstelle von p.

5. (a) Sei A eine $n\times n$-Matrix. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots\rangle$ von $M_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

   (b) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

   Lösung:

   (a) *Lösung*: Der Unterraum $W := \langle I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\rangle$ von $M_{n\times n}(K)$ ist von n Elementen erzeugt, hat also Dimension $\leqslant n$. Es genügt daher zu zeigen, dass $W = \langle I_n, A, A^2, \ldots\rangle$ ist. Hier ist die Inklusion „$\subset$" bereits klar, also bleibt zu zeigen:

   Behauptung: Für alle $k \geqslant 0$ ist $A^k \in W$.

   Wir beweisen dies durch Induktion nach k.

Induktionsverankerung: Für $k \leqslant n-1$ gilt dies nach Konstruktion von W.

Oops: Im Fall $n=0$ ist diese Aussage leer, also gar keine Verankerung. Aber dann ist sowieso $M_{n\times n}(K)$ der Nullraum und der fragliche Raum ebenso, hat also Dimension $n=0$, wie gewünscht. Im folgenden sei daher $n \geqslant 1$.

Induktionsschritt: Sei $k \geqslant n$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei richtig für alle kleineren Werte von k.

Das charakteristische Polynom von A ist normiert vom Grad n; schreiben wir es in der Form $\mathrm{char}_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\mathrm{char}_A(A) = 0$, also

$$A^n \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i.$$

Durch Multiplizieren mit A^{k-n} ergibt sich daraus

$$A^k \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+k-n} \;=\; -\sum_{j=k-n}^{k-1} a_{j-k+n} A^j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegen alle A^j auf der rechten Seite in W; daher liegt auch A^k in W, was zu zeigen war.

(b) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{char}_A(X) = X^3 - 6X^2 - 3X + 18$$

Nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt

$$\mathrm{char}_A(A) = A^3 - 6A^2 - 3A + 18I_3 = 0,$$

also

$$I_3 = -\frac{1}{18}A^3 + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{6}A = \left(-\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{6}I_3\right)\cdot A.$$

Insbesondere ist A invertierbar und es folgt

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I_3.$$

6. Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix A mit

$$A^2 + 2A + 5I_n = 0$$

genau dann, wenn n gerade ist.

Lösung: Die Behauptung ist richtig.

„$\Rightarrow$“: Das reelle Polynom $p(X) := X^2 + 2X + 5$ hat die komplexen Nullstellen $-1 \pm 2i$; diese sind nicht reell. Sei nun A eine $n \times n$-Matrix mit $p(A) = 0$ und n ungerade. Dann hat das charakteristische Polynom von A den ungeraden Grad n, besitzt also eine reelle Nullstelle λ. Diese ist ein Eigenwert von A, sagen wir mit dem zugehörigem Eigenvektor v. Für diesen folgt

$$0 = p(A)v = (A^2 + 2A + 5I_n)v = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)v = P(\lambda)v,$$

also $P(\lambda) = 0$. Dies widerspricht der Tatsache, dass p keine reelle Nullstelle besitzt.

„$\Leftarrow$“: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton erfüllt jede 2×2-Matrix A_2 mit charakteristischem Polynom $p(X)$ die gewünschte Gleichung, zum Beispiel die Begleitmatrix $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Für beliebiges gerades $n \geqslant 0$ sei A die $n \times n$-Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} A_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A^2 + 2A + 5I_n = \begin{pmatrix} A_2 + 2A_2 + 5I_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 + 2A_2 + 5I_2 \end{pmatrix} = 0.$$