Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 20

Gram-Schmidt, Orthogonality

1. Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen lässt.

   Lösung: Schreibe $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ und ergänze $(v_1, \ldots, v_m)$ zu einer geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V. Wende Gram-Schmidt-Orthogonalisierung darauf an mit dem Resultat $(b_1, \ldots, b_n)$. Die Konstruktion impliziert dann $(b_1, \ldots, b_m) = (v_1, \ldots, v_m)$; folglich ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, welche S enthält.

   Aliter: Nach Annahme ist S eine Orthonormalbasis des Unterraums $U := \langle S\rangle$. Da V endlich-dimensional ist, gilt $V = U \oplus U^\perp$. Dabei ist $U^\perp$ wieder endlich-dimensional und besitzt daher eine Orthonormalbasis T. Nach der Vorlesung ist dann $S \cup T$ eine Orthonormalbasis von V.

2. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige:

   (a) Die Matrix A^TA ist symmetrisch.

   (b) Die Matrix A^TA ist positiv definit genau dann, wenn A invertierbar ist.

   (c) Es gilt $\mathrm{Rang}(A^TA) = \mathrm{Rang}(A)$.

   (d) Angenommen A ist symmetrisch und hat die Paare (λ_1, v_1) und (λ_2, v_2) als Eigenwert-Eigenvektor, sodass $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gilt. Zeige, dass falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann $v_1 \perp v_2$ gilt.

   Lösung: Aussage (a) folgt aus der Rechnung $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$.

   Für den Rest berechnen wir zur Vorbereitung für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

   $$(*) \qquad v^T \cdot (A^TA) \cdot v \;=\; (v^TA^T) \cdot Av \;=\; (Av)^TAv \;=\; \|Av\|^2,$$

   wobei $|| \; ||$ die übliche euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

   Ist nun A invertierbar, so folgt $Av \neq 0$ und somit $v^T \cdot (A^TA) \cdot v = \|Av\|^2 > 0$; also ist A^TA positiv definit. Ist umgekehrt A^TA positiv definit, so folgt $\|Av\|^2 = v^T \cdot (A^TA) \cdot v > 0$ und daraus $Av \neq 0$. Also hat die lineare Abbildung $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$ den Kern Null, und daher ist A invertierbar. Damit ist (b) bewiesen.

   Für (c) behaupten wir zunächst: $\mathrm{Kern}(L_A) = \mathrm{Kern}(L_{A^TA})$.

   Beweis: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = 0$ gilt auch $A^TAv = A^T0 = 0$; also haben wir die Inklusion „$\subset$“. Umgekehrt sei $A^TAv = 0$. Aus $(*)$ folgt dann $\|Av\|^2 =$

$v^T \cdot (A^T A) \cdot v = v^T 0 = 0$. Da die euklidische Norm positiv definit ist, folgt daraus $Av = 0$, also $v \in \mathrm{Kern}(L_A)$. Dies zeigt die Inklusion „$\supset$“, und wir sind fertig. *q.e.d.*

Aus der Behauptung folgt schliesslich

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A) &= \dim \mathrm{Bild}(L_A) = n - \dim \mathrm{Kern}(L_A) \\ &= n - \dim \mathrm{Kern}(L_{A^T A}) = \dim \mathrm{Bild}(L_{A^T A}) = \mathrm{Rang}(A^T A). \end{aligned}$$

Um (d) zu beweisen berechnen wir einerseits

$$\langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle,$$

und andererseits

$$\langle Av_1, Av_2 \rangle = v_1^t A^t A v_2 = v_1^t A^2 v_2 = \lambda_2^2 v_1^t v_2 = \lambda_2^2 \langle v_1, v_2 \rangle,$$

wobei wir in der zweiten Gleichung benutzt haben, dass A symmetrisch ist. Also ist

$$\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \implies v_1 \perp v_2,$$

da per Annahme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gelten.

3. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

Lösung: Mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren findet man die gesuchten Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation der Gleichung $Ax = QRx = b$ von links mit der invertierbaren Matrix $Q^{-1} = Q^T$ erhält man das äquivalente Gleichungssystem $Rx = Q^T b = (4, 1, -1)^T$. Da R obere Dreiecksgestalt hat, erhält man hieraus schnell die Lösung $x = (2, 1, -1)^T$.

4. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2, 1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

(b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

Lösung:

(a) Ein einfacher Weg, Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1,0,0)^T$. Man erhält damit

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Also ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U und w_3 eine von U^T.

Alternativ ermittelt man mit Gram-Schmidt für die Vektoren (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) von U, und löst unabhängig davon das lineare Gleichungssystem $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = 0$ um einen Basisvektor u' von U^T zu bestimmen, so dass dann $w_3 := u'/\|u'\|$ eine Orthonormalbasis von U^T ist.

(b) Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch die Formel

$$v \mapsto \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2.$$

Ihre Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis (w_1, w_2) von U ist gleich

$$\big(\langle e_j, w_i\rangle\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} = (w_1, w_2)^T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$\big(\langle e_j, w_3\rangle\big)_{1\leqslant j\leqslant 3} = w_3^T = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

5. Für jeden der folgenden Vektorräume V mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge U gefunden werden.

(a) Betrachte zuerst

$$V_1 = \left\{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

$$U_1 = \{(a_n)_{n=0}^\infty \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0\}$$

(b) Zweitens betrachte

$$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

$$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

Solutions:

(a) Für $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ schreiben wir $s^{(i)}$ für die Folge, deren Elemente alle 0 sind, ausser dem i-ten Element, welches 1 ist. Für alle $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist dann $s^{(i)} \in U$. Sei $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \in U^\perp$. Per Definition gilt für jedes $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

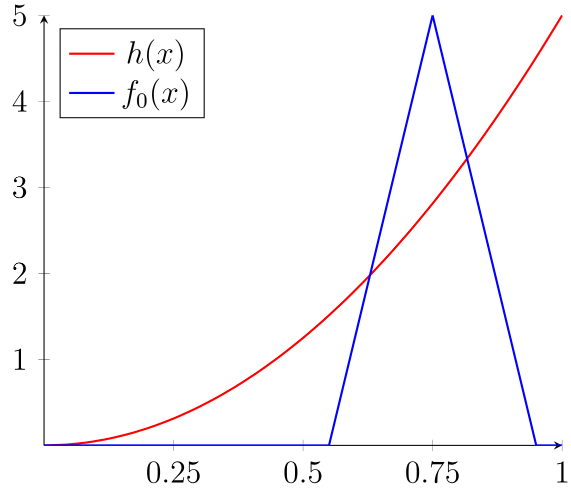
$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(i)} b_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_i = 0.$$

Da dies für alle Indizes i gilt, folgt $b = 0_V$. Da b ein beliebiges Element von $U^\perp$ ist, erhalten wir $U^\perp = \{0_V\}$.

(b) Bemerke zunächst, dass jede Funktion $h \in U^\perp$ auf $[1/2, 1]$ verschwindet. Um dies zu sehen nehme an, dass $h \in U^\perp$ nicht auf $[1/2, 1]$ verschwände. Aus der Stetigkeit von h folgte dann die Existenz von $x_0 \in (1/2, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass h sein Vorzeichen im Intervall $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$ nicht ändert und sodass dieses in $(1/2, 1)$ enthalten wäre. Sei f_0 die stückweise lineare Funktion definiert durch

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, x_0 - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = x_0 \\ 0, & x \in \left[x_0 + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Beispiel für $h(x) = 5x^2$, $x_0 = 3/4$, $n = 5$.



Dann wäre $f_0 \in U$. Es folgte

$$\left|\int_0^1 f_0(x)h(x)dx\right| = \left|\int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} f_0(x)h(x)dx\right| > 0,$$

da der Integrand sein Vorzeichen $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ in nicht wechselte. Dies wäre ein Widerspruch zu $h \in U^\perp$.

Als nächstes zeigen wir, dass jedes $g \in U^\perp$ auf $[0, 1/2]$ konstant ist. Seien $a, b \in (0, 1/2)$ mit $a < b$. Dann existiert $N(a, b) \in \mathbb{N}$, sodass für alle ganzahligen $n \geqslant N(a, b)$ die stückweise lineare Funktion f_n definiert wie folgt in V enthalten ist:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, a - \frac{1}{n}\right] \\ n, & x = a \\ 0, & x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \\ -n, & x = b \\ 0, & x \in \left[b + \frac{1}{n}, 1/2\right] \end{cases}$$

Da das Integral von f_n auf $[0, 1/2]$ trivial ist, gilt $f_n \in U$. Sei $g \in U^\perp$. Dann ist

$$\int_0^{1/2} f(x)g(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x) = -\int_{b-1/n}^{b+1/n} f_n(x)g(x)dx.$$

Im Fall $n \to +\infty$ konvergiert die zweite Gleichung zu $g(a) = g(b)$. Wir zeigen die Konvergenz der linken Seite der entsprechenden zu $g(a)$ (die Konvergenz rechte Seite lässt sich ähnlich zeigen). Da g in a stetig ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Sei nun n so, dass $1/n < \delta$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(x)dx - \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)g(a)dx\right| \\
= & \left|\int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)(g(x) - g(a))dx\right| \\
\leqslant & \int_{a-1/n}^{a+1/n} f_n(x)\left|g(x) - g(a)\right| dx \\
< & \ \varepsilon \int_{a-1/n}^{a+1/n} \left|f_n(x)\right| dx \\
= & \ \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass f_n auf $[a-1/n, a+1/n]$ zu 1 integriert, um die letzte Gleichung zu erhalten. Wenn wir ε gegen 0 gehen lassen, zeigt dies die gewünschte Konvergenz.

Da g stetig ist und a und b beliebig gewählt waren, muss g auf $[0, 1/2]$ konstant sein. Da g auf $[1/2, 1]$ verschwindet folgt aus seiner Stetigkeit, dass g auf dem Intervall $[0, 1]$ verschwindet. Also ist $U^{\perp} = \{0_V\}$.

6. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus

$$\delta\colon V \to V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}),\ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot\rangle.$$

(a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^*$ auf V^* existiert, so dass δ eine Isometrie ist.

(b) Sei B eine geordnete Basis von V, und sei B^* die zugehörige duale Basis von V^*. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^*$ bezüglich B^* in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B an.

Lösung:

(a) Die Abbildung δ ist eine Isometrie für das gesuchte Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle^*$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle \delta(v), \delta(w)\rangle^* = \langle v, w\rangle\,. \tag{1}$$

Da δ bijektiv ist, existiert genau eine Abbildung $\langle\, ,\, \rangle^*$ mit dieser Eigenschaft. Definieren wir also $\langle\, ,\, \rangle^*$ durch die Beziehung (1) oder, äquivalenterweise, durch

$$\langle \lambda, \mu\rangle^* := \langle \delta^{-1}(\lambda), \delta^{-1}(\mu)\rangle$$

für alle $\lambda, \mu \in V^*$, so folgt aus der Linearität und Injektivität von δ^{-1}, dass dies ein Skalarprodukt auf V^* mit der gewünschten Eigenschaft definiert.

(b) Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und

$$A \ := \ [\langle\, ,\, \rangle]_B \ = \ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j}$$

die Darstellungsmatrix von $\langle\, ,\, \rangle$ bezüglich B. Dann ist $\delta(B) := (\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$ eine geordnete Basis von V^*, und nach Konstruktion ist die Darstellungsmatrix von $\langle\, ,\, \rangle^*$ bezüglich $\delta(B)$ gleich

$$[\langle\, ,\, \rangle^*]_{\delta(B)} \ = \ \big(\langle \delta(v_i), \delta(v_j)\rangle^*\big)_{i,j} \ = \ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j} \ = \ A.$$

Sodann sei $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis zu B. Für alle j und k gilt dann

$$\Big(\sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^*\Big)(v_k) \ = \ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^*(v_k) \ = \ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, \delta_{i,k} \ = \ \langle v_j, v_k\rangle \ = \ \delta(v_j)(v_k).$$

Durch Variieren von k folgt daraus

$$\delta(v_j) \;=\; \sum_i \langle v_j, v_i \rangle \, v_i^*.$$

Also ist die Basiswechselmatrix zwischen $\delta(B)$ und B^* gleich

$${}_{B^*}[\mathrm{id}_V]_{\delta(B)} \;=\; \big(\langle v_j, v_i \rangle\big)_{i,j} \;=\; A^T \;=\; A.$$

Deren Inverse ist die Basiswechselmatrix

$${}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^*}]_{B^*} \;=\; (A^T)^{-1}.$$

Nach der Basiswechselformel aus §10.4 der Vorlesung folgt daraus

$$\begin{aligned}
[\langle\,,\,\rangle^*]_{B^*} \;&=\; {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^*}]_{B^*}^T \cdot [\langle\,,\,\rangle^*]_{\delta(B)} \cdot {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^*}]_{B^*} \\
&=\; ((A^T)^{-1})^T A A^{-1} \;=\; A^{-1} A A^{-1} \;=\; A^{-1}.
\end{aligned}$$

Single Choice. In jeder Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dazugehörigen Norm $|| \ ||$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $||v + w|| = ||v|| + ||w||$?

   (a) $v = \binom{1}{1},\ w = \binom{1}{0}$

   (b) $v = \binom{2}{1},\ w = \binom{1}{2}$

   (c) $v = \binom{2}{3},\ w = \binom{3}{1}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $v = \binom{1}{2},\ w = \binom{2}{4}$

   Erklärung: Die Gleichheit gilt genau dann, wenn einer der Vektoren ein nichtnegatives Vielfaches des anderen ist. Also ist nur (d) richtig. Alternativ zeigt dies eine direkte Rechnung.

2. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   (b) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.

   (c) Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.

   (d) Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   Erklärung: Für $v_1 = v_3 \neq 0 = v_2$ ist Aussage (a) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus der Bilinearität des Skalarproduktes.

3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $S,\ T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $S \subset T^\perp$

   (b) $T \subset S^\perp$

   (c) $S \perp T$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \{0\}$

   Erklärung: Es ist $S \perp T$ genau dann, wenn S in der Menge $T^\perp = \{v \in V \mid v \perp T\}$ enthalten ist. Also ist (c) äquivalent zu (a), und aus demselben Grund auch zu (b). Dagegen sind die Teilmengen $S := \{\binom{1}{0}\}$ und $T := \{\binom{1}{1}\}$ von $V = \mathbb{R}^2$ nicht orthogonal zueinander, erfüllen aber die Bedingung (d).

4. Sei S eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S \rangle$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ S ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V.

   (c) $S^{\perp}$ ist ein Unterraum von V.

   (d) $V = S^{\perp} \oplus (S^{\perp})^{\perp}$.

   Erklärung: Das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V ist immer ein Unterraum. Sofern also S kein Unterraum ist, ist Aussage (b) falsch. Die übrigen Aussagen wurden in der Vorlesung bewiesen.

Multiple Choice Fragen

1. Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

   Explanation: Überprüfe, dass $A^* = A$.

2. Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

   Explanation: Überprüfe, dass $U^*U = \mathbf{1}$, äquivalent: die Spalten bilden eine Orthonormalbasis.

3. Seien U, V unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?

   (a) $U + V$ ist unitär.

   Explanation: Falsch. $-U$ ist auch unitär. $0 = U + (-U)$ aber nicht.

   $\boxed{\text{(b)}}$ λU ist unitär.

   Explanation: Wahr. Da $|\lambda| = 1$, ist $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$. Somit $(\lambda U)^* = \overline{\lambda}U^* = \lambda^{-1}U^{-1} = (\lambda U)^{-1}$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ U^{-1} ist unitär.

   Explanation: Wahr. $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1} = (U^{-1})^{-1} = U$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ UV ist unitär.

   Explanation: Wahr. $(UV)^* = V^*U^* = V^{-1}U^{-1} = (UV)^{-1}$.