Musterlösung Serie 21

Gram-Schmidt, Orthogonality

1. Seien $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und$A, B \in M_{n\times m}(K)$ und $C \in M_{m\times p}(K)$. Zeige die folgenden Eigenschaften der adjungierten Matrix:

   (a) $\overline{A+B}^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T$;

   (b) For all $\lambda \in K$, $\overline{(\lambda A)}^T = \overline{\lambda}\,\overline{A}^T$;

   (c) $\overline{(\overline{A}^T)}^T = A$;

   (d) $\overline{I_n}^T = I_n$;

   (e) $\overline{(A\cdot C)}^T = \overline{C}^T \cdot \overline{A}^T$.

   Lösung: Alle Aussagen folgen aus direkten Rechnungen.

2. Sei $K = \mathbb{R}$. Betrachte das innere Produkt auf $K[x]_2$, welches definiert wird durch

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   (a) Wende den Gram-Schmidt Algorithmus auf die Basis $1, x, x^2$ an, um eine orthonormale Basis von $K[x]_2$ zu erhalten.

   (b) Finde eine orthomormale Basis von $K[x]_2$, sodass die Darstellungsmatrix des Ableitungsoperator $p \mapsto p'$ auf $K[x]_2$ zu dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist.

   Solution:

   (a) Sei $u_1 = 1$, da dies bereits ein Vektor der Norm 1 ist. Um Gram-Schmidt anzuwenden setzen wir $v_2 = x - \langle x, 1\rangle$ und $u_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$. Wir berechnen

$$v_2 = x - \int_0^1 x dx = x - \frac{1}{2}$$

   und

$$||v_2||^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Also ist

$$u_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Genauso setzen wir $v_3 = x^2 - \langle x^2, u_2\rangle u_2 - \langle x^2, u_1\rangle u_1$ und $u_3 = \frac{v_3}{||v_3||}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} v_3 &= x^2 - \left(\int_0^1 2\sqrt{3}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) dx\right) u_2 - \int_0^1 x^2 dx \\ &= x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} ||v_3||^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

Also ist

$$u_3 = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

3. **Minimiere den Abstand zu einer Teilmenge.** Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei ausserdem U ein endlichdimensionaler Unterraum von V und schreibe $P_U : V \to U$ für die orthogonale Projektion auf U. Seien $v \in V$ und $u \in U$. Zeige

$$||v - P_U(v)|| \leqslant ||v - u||.$$

Beweise ausserdem, dass in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt genau dann wenn $u = P_U(v)$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} ||v - P_U(v)||^2 &\leqslant ||v - P_U(v)||^2 + ||P_U(v) - u||^2 \\ &= ||v - P_U(v) + P_U(v) - u||^2 \\ &= ||v - u||^2. \end{aligned}$$

Es bleibt die obige (Un-)gleichungskette zu begründen: die erste Ungleichung gilt, da $||P_U(v) - u|| \geqslant 0$. Die zweite Gleichung folgt aus dem Satz von Pythagoras. Tatsächlich gilt per Definition von $P_U(v)$, dass $v - P_U(v) \in U^\perp$ und $P_U(v) - u \in U$ gelten, da U ein Unterraum ist. Durch das ziehen der Quadratwurzel erhalten wir die gewünschte Ungleichung

Gleichheit gilt genau dann wenn in der ersten Zeile gilt

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ||P_U(v) - u||^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P_U(v) = u. \end{aligned}$$

4. Finde ein Polynom p mit reellen Koeffizienten und Grad höchstens 5 welches $\sin(x)$ auf dem Invervall $[-\pi, \pi]$ so gut wie möglich nähert, im Sinne, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - p(x)|^2 \, dx$$

so klein wie möglich ist.

Hint. Formuliere dieses Problem um, um Aufgabe 3 zu benutzen.

Lösung: Sei $V = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum reellwertiger Funktionen auf $[-\pi, \pi]$, und betrachte seinen Unterraum U der Polynomfunktionen auf $[-\pi, \pi]$ von Grad höchstens 5. Wir versehen V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \text{für } f, g \in V.$$

Die obige Aufgabe kann nun wie folgt umformuliert werden: Finde ein Element u aus U, sodass $||\sin(x) - u||$ minimal ist, wobei die Norm durch das obige Skalarprodukt induziert wird. Nach Aufgabe 3 wird dieser Wert durch die orthogonale Projektion von $\sin(x)$ auf U minimiert. Um diese zu berechnen, berechnen wir eine orthonormale Basis $\mathcal{C} = \{u_0, u_1, \cdots, u_5\}$ von U mit dem Gram-Schmidt Verfahren angewendet auf die Standardbasis von U, also $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Anschliessend nutzen wir die Formel.

$$P_U(v) = \langle v, u_0 \rangle u_0 + \langle v, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle v, u_5 \rangle u_5.$$

Ausserdem machen wir uns zu nutze, dass $\sin(x)$ ungerade ist. Deswegen verschwindet das Integral des Produkts dieser Funktion mit einer geraden Funktion auf $[-\pi, \pi]$. Insbesondere verschwindet das Integral des Produktes mit geraden Potenzen von x. Da ungerade Potenzen von x ungerade sind, gilt gleiches auch für diese Funktionen.

Dies vereinfacht unserer Aufgabe! Per Induktion lässt sich leicht zeigen, dass im Gram-Schmidt Verfahren nur die Basiselemente u_i mit ungeraden Indizes in den Berechnungen weiterer Basiselemente ungeraden Indizes benutzt werden. Gleiches gilt für gerade Indizes. Daraus folgt sofort, dass nur ungerade, bzw. gerade, Potenzen von x in der Darstellung der u_i's mit ungeradem, bzw. geraden, Indize vorkommen. Also müssen wir nur die Koeffizienten $\langle \sin(x), u_i \rangle$ nur für ungerade Indizes berechnen.

Also berechnen wir

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}x, \\
u_3 &= \frac{5}{2\pi^{7/2}}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(x^3 - \frac{3\pi^2}{5}x\right), \\
u_5 &= \frac{63}{8\pi^{11/2}}\sqrt{\frac{11}{2}}\left(x^5 - \frac{10}{9}\pi^2\left(x^3 - \frac{3\pi^2}{5}x\right) - \frac{3\pi^4}{7}x\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
P_U(\sin(x)) =& \frac{21}{8\pi^{10}}\big[(33(945 - 105\pi^2 + \pi^4)x^5 - 30\pi^2(1155 - 125\pi^2 + \pi^4)x^3 \\
&+ 5\pi^4(1485 - 153\pi^2 + \pi^4)x\big].
\end{aligned}
$$

5. Sei $V = C([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

für $f, g \in V$. Sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ das lineare Funktional definiert durch $\varphi(f) = f(0)$. Zeige, dass kein $g \in V$ existiert, sodass

$$\forall f \in V : \varphi(f) = \langle f, g\rangle$$

ist.

Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu Satz 6.5.5. der Vorlesung?

Lösung: Nehme an, dass ein solches $g \in V$ existiert. Sei $f_0 \equiv 1$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Dann wäre

$$1 = f_0(0) = \langle f_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

Also existierte ein $x_0 \in (-1,1)$ mit $g(x_0) > 0$ und, da g stetig wäre, existierte ein offenes Intervall U_0 mit $x_0 \in U_0$, sodass $g(x) > 0$ auf U_0 wäre. Indem wir U_0 wenn nötig schrumpfen, könnten wir annehmen, dass 0 nicht im Abschluss von U_0 enthalten wäre. Per Definition wäre $h(0) = 0$.

Definiere $h \in V$ als stetige Funktion auf $[-1,1]$, welche auf einem Subinterval U_1 von U_0 strikt positv wäre und überall sonst verschwände, zum Beispiel als stückweise lineare Funktion wie in Aufgabe 5 der 20. Serie.

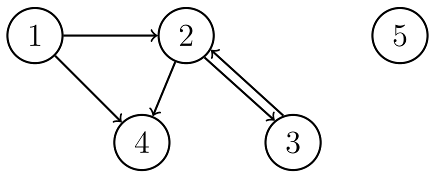
Dann wäre

$$0 = h(0) = \langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx = \int_{U_1} h(x)g(x) > 0.$$

Die ist ein Widerspruch und zeigt somit, dass g nicht existiert.

6. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph. Genauer, seien V eine endliche Menge und $E \subseteq \{(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \mid v_{\text{init}}, v_{\text{term}} \in V \wedge v_{\text{init}} \neq v_{\text{term}}\} \subseteq V \times V$. Wir fassen V als Menge der Knoten eines Graphen auf, und $(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$ als gerichtete Kante $v_{\text{init}} \in V$ zu $v_{\text{term}} \in V$ (wir visualisieren dies, indem wir einen Pfeil zu v_{term} an die Kante zeichnen).

   Beispiel eines gerichteten Graphen.



   Wir definieren ausserdem Vektorräume $\mathbb{R}^V = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{R}\}$, welche wir mit den inneren Produkten

$$\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{v \in V} f_1(v) f_2(v), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}^V$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_E = \sum_{e \in E} \varphi_1(e) \varphi_2(e), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^E$$

   ausstatten. Ausserdem definieren wir $T : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$ als "kombinatorische Ableitung": für $f \in \mathbb{R}^V$ und $e = (v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$, definieren wir

$$T(f)(e) = f(v_{\text{term}}) - f(v_{\text{init}}).$$

   Des Weiteren definieren wir $S : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^V$ durch

$$S(\varphi)(v) = \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, v) \in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (v, v_{\text{term}}) \in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})).$$

   (a) Zeige $T^* = S$ und berechne $T^* \circ T = S \circ T$, was wir auch den kombinatorischen Laplace von G nennen.

   (b) Jetzt vereinfachen wir die Situation indem wir nur noch ungerichtete Kanten betrachten, d.h..

$$(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E \Leftrightarrow (v_{\text{term}}, v_{\text{init}}) \in E,$$

   und annehmen, dass der Graph d-regular ist (für jedes $v \in V$ existieren genau d Knoten $v_{\text{term}} \in V$ mit $(v, v_{\text{term}}) \in E$). Zeige, dass $T^* \circ T$ den Eigenwert 0 hat. Erkläre, warum die geometrische Vielfachheit von 0 mit dem Zusammenhang von G zu tun hat.

   Solution:

(a) Für eine gegebene Kante $e \in E$ schreiben wir $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ für die eindeutigen Knoten mit $e = (e^{(1)}, e^{(2)})$. Für $f \in \mathbb{R}^V$ und $\varphi \in \mathbb{R}^E$, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle f, S(\varphi)\rangle_V &= \sum_{v\in V} f(v) S(\varphi)(v) \\
&= \sum_{v\in V} f(v) \left[\sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V \\ (v_{\text{init}},v)\in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v\in V \\ (v,v_{\text{term}})\in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})) \right] \\
&= \sum_{v\in V} f(v) \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V \\ (v_{\text{init}},v)\in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{v\in V} f(v) \sum_{\substack{v\in V \\ (v,v_{\text{term}})\in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})) \\
&= \sum_{e\in E} \sum_{\substack{v\in V \\ v=e^{(2)}}} f(v)\varphi(e) - \sum_{e\in E} \sum_{\substack{v\in V \\ v=e^{(1)}}} f(v)\varphi(e)
\end{aligned}$$

Da $e^{(1)}$ and $e^{(2)}$ für ein fixes $e \in E$ eindeutig sind, ist die letze Zeile gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in E} f(e^{(2)})\varphi(e) - \sum_{e\in E} f(e^{(1)})\varphi(e) &= \sum_{e\in E} (f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}))\varphi(e) \\
&= \sum_{e\in E} T(f)(e)\varphi(e) \\
&= \langle Tf, \varphi\rangle_E.
\end{aligned}$$

Per Definition der Adjungierten Abbildung zeigt dies $T^* = S$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
S(T(f))(v) &= \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V \\ (v_{\text{init}},v)\in E}} T(f)((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V \\ (v,v_{\text{term}})\in E}} T(f)((v, v_{\text{term}})) \\
&= \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V \\ (v_{\text{init}},v)\in E}} [f(v) - f(v_{\text{init}})] - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V \\ (v,v_{\text{term}})\in E}} [f(v_{\text{term}}) - f(v)] \\
&= E_v f(v) - \sum_{\substack{v_{\text{init}}\in V \\ (v_{\text{init}},v)\in E}} f(v_{\text{init}}) - \sum_{\substack{v_{\text{term}}\in V \\ (v,v_{\text{term}})\in E}} f(v_{\text{term}}) \\
&= E_v f(v) - \sum_{\substack{w\in V \\ w \text{ is a neighbour of } v}} f(w).
\end{aligned}$$

wobei E_v die Zahl der Kanten ist, welche v berühren.

(b) Die Lösung der Aufgabe lässt sich vorzugsweise mit der Matrixdarstellung des kombinatorischen Laplace $T^* \circ T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^V)$ aufschreiben. Schreiben wir für die Knoten V (in beliebiger Reihenfolge) $v_1, \ldots, v_n$. Die Menge der charakteristischen Funktionen

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{1}_{x=v_i}(x) \in \mathbb{R}^V \mid i = 1, \ldots, n\}$$

mit

$$\mathbf{1}_{x=v_i}(x) = \begin{cases} 1, & x = v_i \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

bildet eine Orthnormalbasis von $(\mathbb{R}^V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$. Also ist die Matrixdarstellung von $T^* \circ T$ eine quadratische $n \times n$ Matrix deren Zeilen, bzw. Spalten durch $v_1, \ldots, v_n$ indiziert sind, bzw durch $\mathbf{1}_{x=v_1}, \ldots, \mathbf{1}_{x=v_n}$, in dieser Reihenfolge.

Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Wir schreiben $N(v)$ für die Menge der zu v benachbarten Knoten und berechnen

$$\begin{aligned}
& (T^* \circ T)(\mathbf{1}_{x=v})(x) \\
= & \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, x) \in E}} [\mathbf{1}_{x=v}(x) - \mathbf{1}_{x=v}(v_{\text{init}})] - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (x, v_{\text{term}}) \in E}} [\mathbf{1}_{x=v}(v_{\text{term}}) - \mathbf{1}_{x=v}(x)] \\
= & \sum_{w \in N(x)} [\mathbf{1}_{x=v}(x) - \mathbf{1}_{x=v}(w)] - \sum_{w \in N(x)} [\mathbf{1}_{x=v}(w) - \mathbf{1}_{x=v}(x)] \\
= & 2d\mathbf{1}_{x=v}(x) - 2 \sum_{w \in N(x)} \mathbf{1}_{x=v}(x) \\
= & \begin{cases} 2d, & x = v \\ -2, & x \in N(v) \end{cases}
\end{aligned}$$

Der Faktor 2 ist darauf zurückzuführen, dass wir nicht mehr mit einem gerichteten Graphen arbeiten. Die Elemente von $[T^* \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ können also wie folgt beschrieben werden:

$$([T^* \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})_{i,j} = \begin{cases} 2d, & i = j \\ -2, & v_i \in N(v_j) \end{cases}$$

Bemerke, dass die zuletzt berechnete Matrix symmetrisch ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass die konstante Funktion, welche jeden Knoten auf 1 abbildet und durch den Koordinatenvektor $(1, 1, \cdots, 1)^T$ repräsentiert wird, der Kern von $(T^* \circ T)$ ist. Also ist es eine Eigenfunktion des Laplace-Operators mit Eigenwert 0.

Wir behaputen, dass die Verbindung zwischen der Vielfachheit von 0 als Eigenwert des Laplace-Operators und dem Zusammenhang von G wie folgt ist:

Proposition. *Wenn G genau k Zusammenhangskomponenten hat, so hat 0 Vielfachheit k als Eigenwert des Laplace-Operators von G.*

Beweis. Schreibe $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ für die Zusammenhangskomponenten des Graphen G. Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und sei $\mathbf{1}_{\Omega_j}(x) \in \mathbb{R}^V$ die charakteristische Funktion von Ω_j. Da die Zusammenhangskomponenten jeweils leeren Schnitt haben, lässt sich leicht zeigen, dass diese Funktionen eine lineare Teilmenge von $\mathbb{R}^V$

sind. Wir zeigen nun, dass jedes $\mathbf{1}_{\Omega_j}(x)$ eine Eigenfunktion von $T^* \circ T$ mit Eigenwert 0 ist. Es gilt

$$(T^* \circ T)(\mathbf{1}_{\Omega_j})(x) = -2d\mathbf{1}_{\Omega_j}(x) - 2 \sum_{w \in N(x)} \mathbf{1}_{\Omega_j}(w).$$

Wenn $x \in \Omega_j$ gilt, verschwindet dies da Nachbarn in der selben Zusammenhangskomponente enthalten sind. Andererseits verschwinden für $x \notin \Omega_j$ beide Terme auf der rechten Seite aus dem gleichen Grund. Also ist $(T^* \circ T)(\mathbf{1}_{\Omega_j})(x) = 0$ für alle $x \in V$. Dies zeigt, dass die Vielfachheit von0 mindestens k ist.

Nehme nun an, dass $f \in \mathbb{R}^V$ nicht von $\{\Omega_j \mid j \in \{1, \ldots, k\}\}$ augespannt würde; nehme also an,d ass f auf keinem der Zusammenhangskomponenten von G konstant, aber eine Eigenfunktion $T^* \circ T$ mit Eigenwert 0 ist. Dann wäre

$$0 = \langle (T^* \circ T)(f), f \rangle_V = \langle Tf, Tf \rangle_E = \sum_{e \in E} (Tf(e))^2 = \sum_{e \in E} (f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}))^2.$$

Dies implizierte $f(e^{(2)}) - f(e^{(1)}) = 0$, $\forall e \in E$, also wäre f konstant auf den Endpunkten jeder Kante von G. Dies bedeutet f, dass f konstant auf den Zusammenhangskomponenten von G wäre, ein Widerspruch. □

Single Choice. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für welches $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} x & -x \\ x & x \end{pmatrix}$ unitär?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x|^2 = \frac{1}{2}$.

   (b) Genau für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (c) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x = -\overline{x}$.

   (d) Für $x = 0$.

   Erklärung: Wir berechnen $AA^* = \left(\begin{smallmatrix} 2x\overline{x} & 0 \\ 0 & 2x\overline{x} \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot |x|^2 \cdot I_2$; also ist (a) richtig.

2. Welche Menge ist ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $M_{n \times n}(\mathbb{C})$?

   (a) Die Menge der unitären $n \times n$ Matrizen.

   (b) Die Menge der Selbstadjungierten $n \times n$ Matrizen.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen.

   (d) Die Menge der normalen $n \times n$ Matrizen.

   Erklärung: Für alle symmetrischen Matrizen A und B und komplexe Zahlen λ gilt $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B$; also ist (c) richtig. Hingegen ist die 1×1-Matrix $A := (1)$ unitär und selbstadjungiert, ihr Vielfaches $2iA = (2i)$ aber weder noch; somit sind (a) und (b) falsch. Schliesslich ist die Summe zweier normaler Matrizen im allgemeinen nicht normal; siehe Serie 23 Aufgabe 3 (d).

Multiple Choice Fragen

1. Sei A eine hermitesche Matrix. Welche Aussagen sind korrekt?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\det(A) \in \mathbb{R}$.

   Explanation:

   (a) Es ist $a_{ii} = \overline{a_{ii}} \in \mathbb{R}$, und somit $\mathrm{tr} A = \sum a_{ii} \in \mathbb{R}$.

   (b) $\det A = \det\left(\overline{A^T}\right) = \overline{\det(A^T)} = \overline{\det A} \in \mathbb{R}$. Alternativ: Die Eigenwerte λ_i von A sind reell. Somit auch $\det(A) = \prod \lambda_i$, und $\mathrm{tr} A = \sum \lambda_i$.