Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 22

Selbstadjungiertere Operatoren, Spektraltheorie

1. Sei K ein Körper und sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler K-Skalarproduktraum. Betrachte $T \in \operatorname{End}(V)$ und einen Unterraum U von V. Zeige, dass U invariant unter T ist genau dann wenn $U^\perp$ invariant unter T^* ist.

   Solution: Nehme zunächst an, dass U invariant unter T ist. Dann gilt für jedes $u \in U$ und jedes $w \in U^\perp$,
   $$0 = \langle Tu, w \rangle = \langle u, T^* w \rangle.$$
   Für alle $w \in U^\perp$ ist also $T^* w \in U^\perp$.

   Nehme nun andererseits an, dass $U^\perp$ invariant unter T^* ist. Seien $w \in U^\perp$ und $u \in U$. Es gilt
   $$0 = \langle u, T^* w \rangle = \langle Tu, w \rangle.$$
   Für alle $u \in U$ ist also $Tu \in (U^\perp)^\perp = U$. Hier haben wir die endlichdimensionalität von V benutzt.

2. Seien f, g_1, und g_2 Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums, sodass
   $$f^* \circ f \circ g_1 = f^* \circ f \circ g_2\,.$$
   Zeige $f \circ g_1 = f \circ g_2$.

   Lösung: Für alle $v, w \in V$ gilt
   $$\begin{aligned}\Big\langle f(v), f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\Big\rangle &= \Big\langle v, f^* \circ f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\Big\rangle \\ &= \langle v, (f^* \circ f \circ g_1 - f^* \circ f \circ g_2)(w)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$
   Mit $v := (g_1 - g_2)(w)$ folgt also für alle $w \in V$:
   $$\|f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\|^2 = 0$$
   und somit $f\big((g_1 - g_2)(w)\big) = 0$, also $(f \circ g_1)(w) = (f \circ g_2)(w)$.

3. Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $T \in \operatorname{End}(V)$ ein normaler Operator. Für einen Unterraum $W \subseteq V$ schreiben wir P_W für die orthogonale Projektion auf W.

(a) Beweise:

Theorem. *Es existieren endlich viele komplexe Zahlen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, *und wechselseitig orthogonale Unterräume* $W_1, \ldots, W_k$ *von* V, *sodass*

$$T = \lambda_1 P_{W_1} + \cdots + \lambda_k P_{W_k}.$$

(b) Zeige, dass für jeden Unterraum U von V die Projektion P_U selbstadjungiert ist.

Solution:

(a) Nach dem Spektralsatz für unitäre Vektorräume ist T is orthogonal diagonalisierbar. Für $j = 1, \ldots, k$ seinen λ_j die Eigenwerte von T, und sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von T, sodass für $1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_k = n$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_T(\lambda_1) &= \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_{\ell_1}), \\ \mathrm{Eig}_T(\lambda_j) &= \mathrm{Sp}(v_{\ell_{j-1}+1}, \ldots, v_{\ell_j}), \quad j = 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass das Theorem mit $W_j = \mathrm{Eig}_T(\lambda_j)$ für $j = 1, \ldots, k$ gilt Tatsächlich sind, da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, die W_j's automatisch zueinander orthogonal. Betrachte nun $v \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell_1} a_i T(v_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{\ell_k} a_i T(v_i) \\ &= \lambda_1 \sum_{i=1}^{\ell_1} a_i v_i + \cdots + \lambda_k \sum_{i=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} a_i v_i. \end{aligned}$$

Bemerke, dass aus der Orthonormalitätv von $\mathcal{B}$ folgt, dass $a_i = \langle v, v_i \rangle$ ist. Also ist jede der Summen in der letzen Zeile der obigen Gleichung gleich $\lambda_j P_{W_j}(v)$, für $j \in \{1, \ldots, k\}$. Dies zeigt die gewünschte Gleichheit.

(b) Sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Orthonormalbasis von U. Es gilt $P_U^* = P_U$ genau dann wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle P_U(v), w \rangle = \langle v, P_U(w) \rangle.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle v, P_U(w)\rangle &= \left\langle v, \sum_{i=1}^{r} \langle w, u_i\rangle w \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \overline{\langle w, u_i\rangle} \langle v, u_1\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{r} \langle v, u_i\rangle u_i, w \right\rangle \\
&= \langle P_U(v), w\rangle.
\end{aligned}$$

4. Wir machen $\mathbb{R}[x]_2$ durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

zu einem Skalarproduktraum. Definiere $T \in \operatorname{End}(\mathbb{R}[x]_2)$ durch $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = a_1x$.

(a) Zeige, dass T nicht selbstadjunigert ist.

(b) Die Darstellungsmatrix von T zur Basis $(1, x, x^2)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist gleich ihrer konjugierten Transponierten, obwohl T nicht selbstadjungiert ist. Erkläre, warum dies kein Widerspruch ist.

Solution:

(a) Wäre T selbstadjungiert, erhielten wir

$$\langle Tp, q\rangle = \langle p, T^*q\rangle = \langle p, Tq\rangle.$$

Betrachte nun $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Tp, q\rangle &= \langle a_1x, q\rangle \\
&= a_1 \int_0^1 b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 dx \\
&= a_1 \left(\frac{b_0}{2}x^2 + \frac{b_1}{3}x^3 + \frac{b_2}{4}x^4 \right)\Bigg|_0^1 \\
&= a_1 \left(\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4} \right).
\end{aligned}$$

Genauso erhalten wir

$$\langle p, Tq\rangle = \langle p, b_1 x\rangle = b_1\left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4}\right)$$

Für $a_1 = 0$ und $b_1, a_0, a_2 > 0$ gilt dann $\langle Tp, q\rangle \neq \langle p, Tq\rangle$.

(b) Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass ein Endomorphism T eines reellen Vektorraums mit innerem Produkt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann wenn er selbstadjungiert ist. Das obige ist kein Widerspruch dazu, da $\{1, x, x^2\}$ keine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$ bezüglich des obigen inneren Produktes ist.

5. Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus euklidischer Vektorräume.

(a) Sei $\dim(V) < \infty$. Zeige, dass die Adjunierte von f im folgenden Sinne existiert: es existiert eine eindeutige Abbildung $f' : W \to V$, sodass

$$\text{für alle } v \in V, \text{ für alle } w \in W : \langle f(v), w\rangle = \langle v, f'(w)\rangle.$$

(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn wir statt $\dim(V) < \infty$ annehmen, dass $\dim(W) < \infty$ ist?

Lösung:

(a) Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit endlichimensionalem V haben wir die Adjungierte von f in der Vorlesung als definiert als die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f^* : & W^* & \to & V^* \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

Wir haben auch gesehen, dass lineare Abbildungen existieren

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & V & \to & V^* \\ & v & \mapsto & \varphi_v \text{ s.t. } \varphi_v(v') = \langle v', v\rangle \text{ for all } v' \in V \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & W & \to & W^* \\ & w & \mapsto & \psi_w \text{ s.t. } \psi_w(w') = \langle w', w\rangle \text{ for all } w' \in W \end{array}$$

undm, dass Φ ein Isomorphismus zwischen V und V^* ist, da V endlichdimensional ist. Wir definieren $f' = \Phi^{-1} \circ f^* \circ \Psi$, wie im folgenden Diagram gezeichnet

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{f^*} & V^* \\ {\scriptstyle\Psi}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi^{-1}} \\ W & & V \end{array}$$

Jetzt berechnen wir für irgendein $w \in W$,

$$\begin{aligned} f'(w) = (\Phi^{-1} \circ f^* \circ \Psi)(w) &= (\Phi^{-1} \circ f^*)(\psi_w) \\ &= \Phi^{-1}(\psi_w \circ f) \\ &= v_0, \end{aligned}$$

wobei $v_0 \in V$ für alle $v \in V$ die Bedingung

$$\langle v, v_0 \rangle = \varphi_{v_0}(v) = (\psi_w \circ f)(v) = \langle f(v), w \rangle,$$

erfüllt, d.h. $\langle v, f'(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle$.
Nehme an, dass eine weitere solche Abbildung $h : W \to V$ existiert. Dann gilt für alle $v \in V$ und alle $w \in W$,

$$\langle v, f'(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, h(w) \rangle,$$

was $f'(w) = h(w)$ impliziert.

(b) Nein. Für ein Gegenbeispiel sei I eine beliebige unendliche Menge und sei $V := \mathbb{R}^{(I)}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \;:=\; \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

Dieser Raum hat die Orthonormalbasis $\{\underline{e_i} \mid i \in I\}$ mit $\underline{e_i} = (\delta_{ij})_j$. Sei $W := \mathbb{R}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v \rangle := uv$, und betrachte den Homomorphismus

$$f \colon V \to W, \quad \underline{x} \mapsto \sum_{i \in I} x_i.$$

Nehmen wir an, dass dessen Adjungierte $f^* \colon W \to V$ existiert. Dann ist $f^*(1) = (x_i)_{i \in I}$ mit fast allen $x_i = 0$. Für jedes i gilt aber

$$x_i \;=\; \langle \underline{e_i}, (x_i)_i \rangle \;=\; \langle \underline{e_i}, f^*(1) \rangle \;=\; \langle f(\underline{e_i}), 1 \rangle \;=\; \langle 1, 1 \rangle \;=\; 1.$$

Zusammen ist dies ein Widerspruch; also existiert f^* nicht.

6. Betrachte den Vektorraum V, welcher alle unendlichoft differenzierbaren periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Periode 2π enthält, zusammen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Sei $D : V \to V$ die lineare Transformation definiert durch $D(f) = \frac{df}{dx}$.

(a) Ist D selbstadjungiert? Bestimme die Adjungierte, falls diese existiert.

(b) Ist $\Delta := -D \circ D$ selbstadjungiert?

(c) Sei $U \subset V$ die lineare Hülle der Funktionen

$$\{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

mit dem induzierten inneren Produkt von V. Finde eine orthonormale Basis von U bestehend aus Eigenvektoren von $\Delta|_U$ und bestimme die Vielfachheiten aller Eigenwerte.

Lösung:

(a) Aus partieller Integration folgt

$$\langle Df, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} g\, dx = \frac{1}{2\pi} fg\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\frac{dg}{dx}\, dx = -\langle f, Dg\rangle$$

für alle f, g, also $D^* = -D \neq D$. Daher ist D nicht selbstadjungiert.

(b) Aus (a) und Aufgabe 6 (a) von Serie 19 folgt

$$\Delta^* \;=\; -D^* \circ D^* \;=\; -(-D) \circ (-D) \;=\; \Delta,$$

also ist Δ selbstadjungiert.

(c) Für jedes $n \neq 0$ setze $c_n(x) := \sqrt{2}\cos(nx)$ und $s_n(x) := \sqrt{2}\sin(nx)$. Ausserdem sei $c_0(x) := 1$ und $s_0(x) := 0$.

Behauptung: Die Menge

$$B := \{c_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{s_n \mid n \geqslant 1\}$$

ist eine Orthonormalbasis von U, die aus Eigenvektoren von Δ besteht.

Beweis: Wegen $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ und $\cos(-nx) = \cos(nx)$ für alle $n \geqslant 1$ sowie $s_0 = 0$ erzeugt B den Unterraum U. Sodann implizieren die üblichen Ableitungsregeln für trigonometrische Funktionen für alle $n \geqslant 0$

$$\Delta s_n = n^2 s_n \quad \text{und} \quad \Delta c_n = n^2 c_n\,.$$

Also sind alle Elemente von B Eigenvektoren von Δ.

Als nächstes zeigen wir, dass sie zueinander orthonormal sind. Dafür rechnen wir für alle $n, m \geqslant 0$ unter Benutzung der Selbstadjungiertheit von Δ:

$$n^2\langle s_n, s_m\rangle = \langle n^2 s_n, s_m\rangle = \langle \Delta s_n, s_m\rangle \stackrel{!}{=} \langle s_n, \Delta s_m\rangle = \langle s_n, m^2 s_m\rangle = m^2\langle s_n, s_m\rangle.$$

Für $n \neq m$ folgt daraus $\langle s_n, s_m\rangle = 0$. Durch analoge Rechnungen zeigt man $\langle s_n, c_m\rangle = \langle c_n, s_m\rangle = \langle c_n, c_m\rangle = 0$ für alle $n \neq m$. (All dies kann man übrigens auch durch direkte Berechnung der Integrale, z.B. mit dem Additionstheorem, zeigen.) Weiter können wir für alle $n \geqslant 1$ die Formeln

$$\begin{aligned}
\cos^2(nx) &= \frac{\cos(2nx)+1}{2} \\
\sin^2(nx) &= 1-\cos^2(nx) \;=\; \frac{1-\cos^2(2nx)}{2} \\
\sin(nx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\sin(2nx),
\end{aligned}$$

in die betreffenden Integrale einsetzen und ausrechnen:

$$\langle s_n, s_n\rangle = 1, \quad \langle s_n, c_n\rangle = 0, \quad \langle c_n, c_n\rangle = 1\,.$$

Noch einfacher berechnen wir

$$\langle c_0, c_0\rangle = 1, \quad \langle c_0, s_n\rangle = 0, \quad \langle c_0, c_n\rangle = 0$$

für alle $n \geqslant 1$. Zusammen zeigt dies, dass B ein Orthonormalsystem ist. Da es den Unterraum U erzeugt, ist es daher eine Orthonormalbasis von U.

Insgesamt ist B also eine Orthonormalbasis von U aus Eigenvektoren von Δ. Jeder Eigenraum von $\Delta|_U$ ist daher von Vektoren in B erzeugt. Wir schliessen, dass $\Delta|_U$ die Eigenwerte

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

mit den jeweiligen Vielfachheiten $1, 2, 2, 2, \ldots$ besitzt.

Multiple Choice Fragen

1. Seien A und B komplexe selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $A + B$ ist selbstadjungiert.

   (b) λA ist selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(c)}}$ λA ist normal.

   Explanation:

   (a) $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$.

   (b) Mit $\lambda = i$ ist $(iA)^* = -iA^* = -iA$ nicht selbstadjungiert.

   (c) Sei $B = \lambda A$. $B^*B = \overline{\lambda} A^* \lambda A = |\lambda|^2 AA = BB^*$.

2. Seien A und B komplexe selbstadjungierte $n \times n$ Matrizen, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) AB ist selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $AB + BA$ ist selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $AB - BA$ ist normal.

   $\boxed{\text{(d)}}$ ABA ist selbstadjungiert.

   Explanation:

   (a) $(AB)^* = B^*A^* = BA$. Ein Gegenbeispiel ist: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $(AB + BA)^* = B^*A^* + A^*B^* = BA + AB$.

   (c) $(AB - BA)^* = B^*A^* - A^*B^* = -(AB - BA)$. Also:

   $$(AB - BA)^* (AB - BA) = (AB - BA)(AB - BA)^* = -(AB - BA)^2 .$$

   (d) $(ABA)^* = A^*B^*A^* = ABA$.

3. Seien A eine normale Matrix und $p \in \mathbb{C}[t]$ ein polynom. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) $p(A)^* = p(A^*)$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $A^i(A^*)^j = (A^*)^j A^i$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $p(A)$ ist normal.

(d) Jeder Eigenwert λ von A ist auch ein Eigenwert von $p(A)$.

$\boxed{\text{(e)}}$ Jeder Eigenvektor v von A ist auch ein Eigenvektor von $p(A)$.

Explanation:

(a) Falsch. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$. Ist $p(t) = \sum a_i t^i$, so ist $p(A)^* = \sum \overline{a_i} (A^*)^i$.

(b) Wahr. Es ist $AA^* = A^*A$. Mit Induktion ist:

$$A^i (A^*)^j = A^{i-1} A^* A (A^*)^{j-1} = \ldots = A^{i-1} (A^*)^j A = \ldots = (A^*)^j A^i.$$

(c) Wahr. Die $a_i A^i$ ($i \geqslant 0$) sind normal und somit auch deren Summe.

(d) Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $A = 0$, $p(t) = 1$, dann ist $p(A) = 1$, hat 0 nicht als Eigenwert.

(e) Wahr. $p(A)v = \sum a_i A^i v = \sum a_i \lambda^i v = p(\lambda) v$.

Note. Sei (v_i) eine ONB aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i von A, dann ist (v_i) eine ONB aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $p(\lambda_i)$ von $p(A)$.