D-MATH
Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Lineare Algebra II

FS 2023

Musterlösung Serie 23

Positiv-Definitheit, Isometrien

1. Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$, V ein K-Vektorraum, und sei B be a symmetric bilinearform on V. Wir definieren $q_B(v) = B(v, v)$ für jedes $v \in V$ als die quadratische Form, die mit B assoziiert ist. Zeigen Sie

$$B(v, w) = \frac{1}{2}(q_B(v + w) - q_B(v) - q_B(w)).$$

Solution: Dies folgt direkt aus der Bilinearität und Symmetrie von B. Es gilt

$$\begin{aligned} q_B(v+w) - q_B(v) - q_B(w) &= B(v+w, v+w) - B(v,v) - B(w,w) \\ &= B(v, v+w) + B(w, v+w) - B(v,v) - B(w,w) \\ &= B(v,w) + B(w,v) \quad \textit{(Linearität in beiden Argumenten)} \\ &= 2B(v,w) \quad \textit{(Symmetrie).} \end{aligned}$$

2. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.

(b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$.

Lösung:

(a) Durch direktes Ausrechnen zeigt man $A^T A = I_3$ und $\det A = 1$.

(b) Nach dem Satz vom Fussball ist die Abbildung L_A eine Drehung. Die Drehachse ist enthalten im Eigenraum von A zum Eigenwert 1, den wir bestimmen als

$$\mathrm{Eig}_{1,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiter existiert eine geordnete Orthonormalbasis B mit

$$_B[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

für einen Drehwinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Es folgt

$$1 + 2\cos\varphi \;=\; \mathrm{Spur}\; {}_B[A]_B \;=\; \mathrm{Spur}\; A \;=\; -\frac{2}{3},$$

also

$$\varphi \;=\; \arccos(-5/6) \;=\; \pi - \arccos(5/6) \;\approx\; 146.44^\circ.$$

Aliter: Nachdem die Rotationsachse bestimmt wurde, bestimme einen dazu orthogonalen Vektor, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sein Bild $w := Av$ ist also auch in der Ebene, welche orthogonal zur Rotationsache ist, enthalten. Wir können den Winkel φ berechnen durch

$$\varphi = \arccos(\cos(\varphi)) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||}\right).$$

3. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

Lösung: Seien A_i, B_i, C_i die jeweiligen Hauptminoren. Da $\det A_2 = \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = -6$ negativ ist, ist A nicht positiv definit. Dagegen sind $\det B_i = 6,\ 33,\ 170$ für $i = 1,\ 2,\ 3$ alle positiv, also ist B positiv definit. Ebenso sind $\det C_i = 3,\ 18,\ 135,\ 592$ für $i = 1, \ldots, 4$ alle positiv, also ist auch C positiv definit.

4. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(A) A ist positiv definit, d.h. $v^T Av > 0$ für alle $v \neq 0$;

(B) Alle Eigenwerte von A sind positiv;

(C) Es existert eine invertierbare symmetrische Matrix $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $S^2 = A$.

Solution: (A) $\implies$ (B): Sei v ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert λ. Durch Normalisieren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x^T x = 1$ ist. Aus (A) folgt

$$0 < x^T AX = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda.$$

(B) $\implies$ (C): Da A symmetrisch ist folgt aus dem Spektralsatz die Existenz von $Q \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D,$$

wobei $\{\lambda_i\}$ die nicht notwendigerweise unterschiedlichen Eigenwerte von A sind. Sei D' die Diagonalmatrix mit den $\sqrt{\lambda_i}$s auf der Diagonale . Dann ist $D'^2 = D = Q^{-1}AQ$, also folgt

$$(QD'Q^{-1})^2 = Q(D')^2Q^{-1} = A.$$

Aus $Q \in \mathrm{O}_3$ folgt $Q^{-1} = Q^T$. Jetzt sehen wir direkt, dass $QD'Q^T$ symmetrisch und invertierbar ist.

(C) $\implies$ (A): Sei S eine invertierbare symmetrische reelle Matrix mit $S^2 = A$. Da S invertierbar ist gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : S \cdot v = 0 \iff v = 0.$$

Also gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$v^T Av = v^T S^2 v = v^T S^T Sv = (Sv)^T(Sv) = ||Sv||^2 > 0.$$

5. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt
$$|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n.$$
Für welche f gilt Gleichheit?

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A)$ für jede Darstellungsmatrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ von f bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ gilt. Wir zeigen, dass A dann orthogonal ist, also $A^TA = I_n = AA^T$. Da für ein Paar $u, v \in V$ die Gleichung $\langle fu, fv\rangle = \langle u, v\rangle$ gilt, erhalten wir

$$(Au)^T M(Av) = u^T A^T MAv = u^T Mv,$$

wobei M die Darstellungsmatrix des inneren Produkts bezüglich $\mathcal{B}$ ist. Da die vorherige Aussage für jedes Paar $u, v \in V$ gilt, erhalten wir

$$A^T MA = M.$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal ist, folgt $M = I_n$. Also ist $A^TA = I_n$. Wir schliessen, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis von V bilden. Insbesondere hat jeder Diagonaleintrag a_{ii} von A Norm kleinergleich 1. Daraus folgt

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{Tr}(A) \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn jeder Diagonaleintrag Norm 1 hat und wenn alle diese Einträge das selbe Vorzeichen haben, also wenn $A = \pm I_n$ ist. Tatsächlcih ist f in diesen Fällen $\pm$ die Identität.

Aliter: Nach dem Spektralsatz existiert eine geordnete Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ die Form

$$[M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix}$$

hat, wobei D_k gleich ± 1 oder gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$ ist mit $a_k^2 + b_k^2 = 1$.

Im ersten Fall gilt $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 1$ und im zweiten Fall $|\operatorname{Tr}(D_k)| = |2a_k| \leqslant 2$. Zusammen gilt daher

$$|\operatorname{Tr}(f)| = |\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Tr}(D_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\operatorname{Tr}(D_k)| \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für alle D_k vom zweiten Typ $|\operatorname{Tr}(D_k)| = 2$ gilt und wenn alle Diagonaleinträge von $[M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = \pm \mathrm{id}_V$ ist.

Aliter ohne Spektralsatz: Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine beliebige geordnete Orthonormalbasis von V. Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt dann

$$f(b_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_j)\rangle \cdot b_i.$$

Somit hat f die Darstellungsmatrix $[M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (\langle b_i, f(b_j)\rangle)_{ij}$. Daraus folgt

$$\operatorname{Tr}(f) \;=\; \operatorname{Tr}([M_f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_i)\rangle.$$

Da f orthogonal ist, gilt für jedes i nun aber $\|b_i\| = \|f(b_i)\| = 1$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung haben wir daher

$$|\langle b_i, f(b_i)\rangle| \leqslant \sqrt{||b_i||^2\,||f(b_j)||^2} = 1.$$

Durch Aufsummieren folgt daraus $|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n$, wie gewünscht.

Ausserdem gilt $|\operatorname{Tr}(f)| = n$ genau dann, wenn die reellen Zahlen $\langle b_i, f(b_i)\rangle$ alle gleich 1 oder alle gleich -1 sind. In diesem Fall haben wir für jedes i auch Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und daher ist $f(b_i)$ linear abhängig von b_i. Somit ist $f(b_i) = b_i$ für alle i, oder $f(b_i) = -b_i$ für alle i, also $f = \pm \mathrm{id}_V$.

6. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass

$$TE_1 = E_2$$

gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von E_1 und E_2.

Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$ ist.

Solution: Zunächst bestimmen wir zwei Orthonormalbasen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1, v_2 \in E_1$ und $w_1, w_2 \in E_2$. Dies liefert orthogonale Matrizen $M_1 := (v_1 v_2 v_3)$ und $M_2 := (w_1 w_2 w_3)$. Diese haben Determinante ± 1 , und nach etwaigem Ersetzen von v_3 durch $-v_3$, beziehungsweise von w_3 durch $-w_3$, können wir erreichen, dass $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$ ist.

Sodann erinnern wir uns daran, dass die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden. Insbesondere ist jede Komposition von Drehungen und die Inverse jeder Drehung wieder eine Drehung, und nach Konstruktion sind M_1 und M_2 Drehungen.

Sei nun E_0 der von den Standardbasisvektoren e_1, e_2 aufgespannte Unterraum. Nach Konstruktion gilt dann $M_1 E_0 = E_1$ und $M_2 E_0 = E_2$. Für eine beliebige Drehung T gilt dann

$$TE_1 = E_2 \iff TM_1E_0 = M_2E_0 \quad \iff \quad M_2^{-1}TM_1E_0 = E_0.$$

Also ist $D := M_2^{-1}TM_1$ eine Drehung mit $DE_0 = E_0$, und $T = M_2 D M_1^{-1}$. Es bleibt daher, alle Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ zu bestimmen. Eine solche Drehung muss auch das orthogonale Komplement von E_0 in sich abbilden. Dieses ist von dem Standardbasisvektor e_3 erzeugt. Wegen $\|De_3\| = \|e_3\| = 1$ muss dann $De_3 = \pm e_3$ sein.

Im Fall $De_3 = e_3$ ist D eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}e_3$, und alle solchen sind gegeben durch die Matrizen

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $(a, b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Sodann ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit $SE_0 = E_0$ und $Se_3 = -e_3$. Im Fall $De_3 = -e_3$ ist daher $S^{-1}D$ eine Drehung mit $S^{-1}DE_0 = E_0$ und $S^{-1}De_3 = e_3$. Somit ist $S^{-1}D = D_\varphi$ für ein φ und damit $D = SD_\varphi$. Die Menge aller Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ ist daher

$$\{D_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{SD_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge aller Drehungen T mit $TE_1 = E_2$ ist also schlussendlich

$$\left\{M_2 D_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{M_2 S D_\varphi M_1^{-1} \mid \varphi \in \mathbb{R}\right\}.$$