D-MATH — Lineare Algebra II — FS 2023

Prof. M. Einsiedler

Prof. P. Biran

Musterlösung Serie 24

Bilinearformen, Singulärwertzerlegung, Jordansche Normalform

1. (a) Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Gib eine Singulärwertzerlegung von A^T an.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Matrix

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und das zugehörige charakteristische Polynom

$$P_{A^T A}(X) \; = \; \det \begin{pmatrix} 2 - X & -1 \\ -1 & 2 - X \end{pmatrix} \; = \; X^2 - 4X + 3 \; = \; (X - 3)(X - 1).$$

Somit hat $A^T A$ die Eigenwerte $\lambda_1 := 3$ und $\lambda_2 := 1$. Die Singulärwerte von A sind also $\sigma_1 := \sqrt{3}$ und $\sigma_2 := 1$ und die Matrix D ist

$$D := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die normierten Eigenvektoren von $A^T A$ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 sind

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese bilden die Spalten von R^T, also betrachten wir die orthogonale Matrix

$$R := (v_1 \; v_2)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Gleichung $AR^{-1} = QD$ erfordert, dass für $i = 1, 2$ die i-te Spalte von Q gleich $1/\sigma_i$ mal der i-ten Spalte von AR^{-1} ist. Wir haben also $Q := (w_1\ w_2\ w_3)$ mit

$$w_1 := \frac{1}{\sigma_2} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := \frac{1}{\sigma_1} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und einem beliebigen Vektor w_3, so dass (w_1, w_2, w_3) eine Orthonormalbasis ist. Zum Beispiel liefert der Gram-Schmidt-Algorithmus für die Basis (w_1, w_2, e_1) mit $e_1 := (1, 0, 0)^T$ den Vektor

$$w_3 := \frac{e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2}{||e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die gesuchte Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A = QDR = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal. Somit ist $A^T = R^T D^T Q^T$ wieder eine Singulärwertzerlegung.

2. Betrachte die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Finde eine Matrix $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

Solution: ONB:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

bestehend aus Eigenvektoren von A, sodass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Benutze das Lemma über verallgemeinerte Eigenräume aus der Vorlesung, um die folgenden Aussagen zu beweisen. Benutze aber nicht das Theorem über die Jordannormalform.

(a) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass 0 der einzige Eigenwert von N ist.

(b) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass $N^n = O_{n\times n}$. Anders ausgedrückt, ist N nilpotent mit Index kleiner als oder gleich $\dim(V)$.

(c) Betrachte ein nilpotentes $N \in \mathrm{End}(V)$ und nehme an, dass $p_N(x)$ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist $p_N(x) = (-x)^n$.

(d) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und nehme an, dass $p_T(x)$ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\eta \in K$ und definiere $S = T - \eta\,\mathrm{Id}_V$. Dann zerfällt auch $p_S(x)$ über K in Linearfaktoren. Insbesondere gilt $p_S(x) = p_T(x+\eta)$.

(e) Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ mit einzigem Eigenwert $\lambda \in K$ und nehme an, dass $p_T(x)$ in Linearfaktoren über K zerfällt. Definiere $N = T - \lambda\,\mathrm{Id}_V$. Dann ist $p_N(x) = (-x)^n$ und es gilt $N^n = O_{n\times n}$.

4. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Über $\mathbb{R}$ hat A das charakteristische Polynom $(X-1)^2(X-4)$. Der Eigenraum zum Eigenwert 4 hat also Dimension 1. Sodann berechnen wir $\mathrm{rank}(A - I_3) = 1$; deshalb hat der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2. Deshalb existiert eine Basis aus Eigenvektoren und die Matrix ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ mit der Jordanschen Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_3$ ist das charakteristische Polynom gleich $(X-1)^3$; somit besitzt A genau einen Hauptraum zum Faktor $X-1$. Wir rechnen

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A - I_3)^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Aus $\dim \mathrm{Kern}(A - I_3) = 2$ folgt, dass es jeweils einen Jordanblock der Grösse 1 und 2 gibt. Somit hat die Matrix A über $\mathbb{F}_3$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; X^4 - 11X^3 + 45X^2 - 81X + 54 \;=\; (X-2)\cdot(X-3)^3\,.$$

Wir betrachten die Eigenwerte 2 und 3 separat.

Eigenwert 2: Der Raum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(2)$ ist eindimensional und gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert 2. Wir berechnen $\mathrm{Kern}(L_{A-2I_4})$ und finden den zugehörigen Eigenvektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwert 3: Für $B := A - 3I_4$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B^3.$$

Dies impliziert

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathrm{rank}(B^k)$	2	1	1	1	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(L_{B^k})$	2	3	3	3	$\cdots$
$\#\ k \times k$-Jordanblöcke zum EW 3	1	1	0	0	$\cdots$

Sodann rechnen wir

$$\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3) \;=\; \mathrm{Kern}(L_{B^3}) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dann suchen wir einen Vektor $v_2 \in \widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$, dessen Bild unter L_B ungleich Null ist. Zum Beispiel tut es

$$v_2 := \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Bv_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diesen ergänzen wir um einen beliebigen Vektor $v_3 \in \mathrm{Kern}(L_B) \setminus \langle Bv_2 \rangle$, zum Beispiel

$$v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet v_2, Bv_2, v_3 eine Basis von $\widetilde{\mathrm{Eig}}_A(3)$.

Zusammenführung: Nach der Hauptraumzerlegung ist $b := (v_1, Bv_2, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Nach Konstruktion gilt für diese $Av_1 = 2v_1$ und $A(Bv_2) = 3(Bv_2)$ und $Av_2 = Bv_2 + 3v_2$ sowie $Av_3 = 3v_3$. Für die Basiswechselmatrix

$$S \ := \ (v_1 \mid v_3 \mid Bv_2 \mid v_2) \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$S^{-1}AS \ = \ \left(\begin{array}{c|c|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dies ist die Jordansche Normalform von A.

6. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$

wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter c heisst die *Lichtgeschwindigkeit.* Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

Eine lineare Abbildung $F : M \to M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4\colon\ s\big(F(v), F(w)\big) = s(v, w)\,.$$

(a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

(b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von M sind:

i. Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ für jedes $T \in O(3)$.

ii. Ein *Lorentzboost* in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma, \end{pmatrix}$$

für $\gamma := 1/\sqrt{1-v^2}$.

(c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x,x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel in M.* Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball": Jede lineare Isometrie φ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

Bemerkung. Für $c \to \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.

Lösung:

(a) Sei $F\colon M \to M$ eine Isometrie, und sei $v = (x_1, \ldots, x_4)^T$ ein beliebiges Element im Kern von F. Bezeichne mit $e_1, \ldots, e_4$ die Standard-Basis von $M = \mathbb{R}^4$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, 4$

$$\pm x_i \;=\; s(v, e_i) \;=\; s(F(v), F(e_i)) \;=\; s(0, e_i) \;=\; 0,$$

also $v = 0$. Somit ist $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$, und als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist F daher bijektiv.

(b) (i) Folgt durch direktes Nachrechnen.

(ii) Für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in M gilt

$$\begin{aligned} s(Bv, Bv') &= (\gamma x - v\gamma t)(\gamma x' - v\gamma t') + yy' + zz' - (-v\gamma x + \gamma t)(-v\gamma x' + \gamma t') \\ &= (\gamma^2 - v^2\gamma^2)xx' + yy' + zz' - (\gamma^2 - v^2\gamma^2)tt' \\ &= xx' + yy' + zz' - tt' \\ &= s(v, w)\,, \end{aligned}$$

also ist der Lorentzboost L_B eine Isometrie.

(c) Sei $\varphi : M \to M$ eine lineare Isometrie mit $\det(\varphi) = 1$.

Schritt 1: Es existiert ein φ-invarianter Unterraum U der Dimension 2.

Beweis: Jeder irreduzible Faktor des charakteristischen Polynoms von φ hat den Grad 1 oder 2. Falls ein irreduzibler Faktor vom Grad 2 existiert, können wir die Jordan-Normalform von φ schreiben mit einem 2×2-Block links oben. Andernfalls haben alle irreduziblen Faktoren den Grad 1 und die Jordan-Normalform von φ ist eine obere Dreiecksmatrix. In beiden Fällen erzeugen die ersten beiden Basisvektoren einen φ-invarianten Unterraum der Dimension 2. $\square$

Schritt 2: Das „orthogonale Komplement“

$$U^\perp = \{v \in M \mid \forall u \in U\colon s(u,v) = 0\}$$

ist ebenfalls ein φ-invarianter Unterraum der Dimension 2.

Beweis: Genauso wie im Fall eines Skalarprodukts, da s nicht entartet ist. $\square$

Schritt 3: Es gilt $U \subsetneqq U^\perp$.

Beweis: Die Einschränkung von s auf den durch $t = 0$ definierten Unterraum V ist positiv definit. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \dim(U \cap V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) \\ &\geqslant \dim(U) + \dim(V) - \dim(M) \;=\; 2 + 3 - 4 \;= 1. \end{aligned}$$

Also existiert ein von Null verschiedener Vektor $u \in U \cap V$, und für diesen ist $s(u,u) > 0$. Somit ist $u \notin U^\perp$.

Schritt 4: Beweis im Fall $U \cap U^\perp \neq 0$.

Beweis: Nach Schritt 1 und 2 ist $U \cap U^\perp$ wieder ein φ-invarianter Unterraum, und nach Schritt 3 hat er jetzt die Dimension 1. Jeder von Null verschiedene Vektor u darin ist daher ein Eigenvektor von φ. Nach Definition von $U^\perp$ erfüllt er ausserdem $s(u,u) = 0$, wie gewünscht. $\square$

Ab jetzt nehmen wir $U \cap U^\perp = 0$ an. Dann gilt $M = U \oplus U^\perp$.

Schritt 5: Nach allfälligem Vertauschen von U und $U^\perp$ können wir annehmen, dass s auf U positiv definit und auf $U^\perp$ indefinit ist.

Beweis: Betrachte irgendeine geordnete Basis von U und ergänze sie um geordnete Basis von $U^\perp$ zu einer Basis B von M. Nach Definition von $U^\perp$ ist die Darstellungsmatrix $[s]_B$ dann eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Grösse 2. Die Signatur von s ist daher die Summe der Signaturen von $s|_{U\times U}$ und $s|_{U^\perp\times U^\perp}$. Da s die Signatur $(3,1)$ hat, muss eine dieser Einschränkungen die Signatur $(2,0)$ und die andere die Signatur $(1,1)$ haben. $\square$

Schritt 6: Für die Einschränkungen der gegebenen Isometrie

$$\varphi_U := \varphi|_U : U \to U \qquad \text{und} \qquad \varphi_{U^\perp} := \varphi|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$$

gilt $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = \pm 1$.

Beweis: Die Einschränkung φ_U ist eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts $s|_{U\times U}$, also ist $\det(\varphi_U) = \pm 1$. Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\det(\varphi_U)\cdot\det(\varphi_{U^\perp}) \;=\; \det(\varphi) \;=\; 1$$

Zusammen folgt daraus $\det(\varphi_{U^\perp}) = \det(\varphi_U)$. □

Schritt 7: Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = -1$.

Beweis: Hier ist φ_U eine Isometrie des 2-dimensionalen euklidischen Vektorraums U mit Determinante -1, also eine Spiegelung mit den Eigenwerten $+1$ und -1. Zum anderen ist $\varphi_{U^\perp}$ ein Endomorphismus des 2-dimensionalen reellen Vektorraums $U^\perp$ mit Determinante -1. Also zerfällt sein charakteristisches Polynom schon über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, und daher existiert ein Eigenvektor $v \in U^\perp$, sagen wir zum Eigenwert λ. Ist $s(v,v) = 0$, so ist das schon der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. Andernfalls zeigt die Rechnung

$$s(v,v) \;=\; s(\varphi(v),\varphi(v)) \;=\; s(\lambda v,\lambda v) \;=\; \lambda^2\cdot s(v,v),$$

dass $\lambda = \pm 1$ sein muss. Wegen $\det(\varphi_{U^\perp}) = -1$ muss $\varphi_{U^\perp}$ dann auch den Eigenwert $-1/\lambda = \mp 1$ haben. Zusammen zeigt dies, dass φ die Eigenwerte ± 1 jeweils mit Vielfachheit 2 hat.

Beide Eigenräume sind dann φ-invariante Unterräume der Dimension 2. Nachdem wir U und $U^\perp$ durch diese ersetzen, ist die Einschränkung $\varphi_{U^\perp}$ also skalar. Da aber $s|_{U^\perp\times U^\perp}$ indefinit ist, existiert ein Vektor $v \in U^\perp$ mit $s(v,v) = 0$. Dies ist der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. □

Schritt 8: Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = 1$.

Beweis: Da $s|_{U^\perp\times U^\perp}$ indefinit ist, existiert eine Basis B von $U^\perp$ mit

$$[s|_{U^\perp\times U^\perp}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Darstellungsmatrix $A := {}_B[\varphi_{U^\perp}]_B$ gilt dann $A^T\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(A) = 1$. Durch eine direkte Rechnung zeigt man, dass diese Bedingungen äquivalent sind zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 - b^2 = 1$. Der Spaltenvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ entspricht daher einem Eigenvektor von $\varphi_{U^\perp}$ zum Eigenwert $a+b$ im Lichtkegel. □

Single Choice. In each exercise, exactly one answer is correct.

1. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und sei λ ein Eigenwert von f. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Jeder Eigenvektor von f zum Eigenwert λ liegt im Hauptraum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder Vektor in $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

   (c) Der Hauptraum $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)$ ist nicht der Nullraum.

   (d) Für jeden Eigenwert μ von f mit $\mu \neq \lambda$ ist $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\mu) \cap \widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \langle 0 \rangle$.

   Erklärung: Der Hauptraum der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich $X - 1$ ist zweidimensional, aber der Eigenraum ist eindimensional.

2. Für jeden Endomorphismus f eines n-dimensionalen Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und jeden Eigenwert λ von f gilt:

   (a) $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)$.

   (b) $\dim(\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)) = 1$.

   (c) $\dim(\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda)) = n$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \mathrm{Kern}((f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^n)$.

   Erklärung: Sei m die algebraische Multiplizität von λ. Dann gilt $m \leqslant n$ und $\widetilde{\mathrm{Eig}}_f(\lambda) = \mathrm{Kern}((f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m) \subset \mathrm{Kern}((f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^n)$. Aus der Hauptraumzerlegung folgt, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist.

3. Der Hauptraum der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $X - 2$ ist

   (a) Eindimensional

   (b) Zweidimensional

   $\boxed{\text{(c)}}$ Dreidimensional

   (d) Vierdimensional

   Erklärung: Unabhängig davon, was oberhalb der Diagonalen steht, ist das charakteristische Polynom $(X - 2)^3(X - 3)$; also hat der Hauptraum bezüglich $X - 2$ die Dimension 3.

4. Sei A eine 3×3-Matrix mit $A \neq 0$ und $A^2 = 0$. Dann besitzt die Jordansche Normalform von A

   (a) 1 Jordanblock.

   $\boxed{\text{(b)}}$ 2 Jordanblöcke.

   (c) 3 Jordanblöcke.

   (d) Das hängt von der genauen Matrix A ab.

   Erklärung: Eine nilpotente Matrix hat nur den Eigenwert 0, also sind die möglichen Jordan-Normalformen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die erste Matrix hat Quadrat ungleich Null, und weil A auch nicht die Nullmatrix ist, bleibt nur die mittlere Option, also hat die Jordansche Normalform zwei Jordanblöcke.

Multiple Choice Fragen

1. Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**: Für beliebige ganze Zahlen $n > m \geqslant 1$ existiert eine quadratische Matrix ...

   $\boxed{\text{(a)}}$ mit charakteristischem Polynom $X^m + X^n$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ mit Minimalpolynom X^m und charakteristischem Polynom X^n.

   $\boxed{\text{(c)}}$ mit Minimalpolynom $X^m \cdot (X^n - 1)$.

   Erklärung: Die Begleitmatrix eines Polynoms hat genau dieses Polynom als Minimal- und charakteristisches Polynom; daher sind (a) und (c) richtig. Auch (b) ist richtig, zum Beispiel für eine Blockdiagonalmatrix mit einem Jordanblock der Grösse m und $n - m$ Jordanblöcken der Grösse 1.