D-MATH
Prof. M. Einsiedler
Prof. P. Biran

Lineare Algebra II

FS 2023

Musterlösung Serie 25

Jordan Normal form, Multilinear algebra

1. Beweise die folgende Propositionen:

   (a) Für alle K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ und W ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_r \to W$.

   (b) Betrachte lineare Abbildungen von K-Vektorräumen $f_i \colon V_i' \to V_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ sowie $g \colon W \to W'$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) &\to \mathrm{Mult}_K(V_1', \ldots, V_r'; W'), \\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r). \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Für jede Wahl eines Index $1 \leqslant i \leqslant r$ und von Vektoren $v_j \in V_j$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\varepsilon : \ V_i \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_r, \quad v \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_r).$$

Wir merken uns, dass ε von der Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ abhängt, auch wenn wir dies der Übersichtlichkeit wegen in der Notation unterdrücken. Nach Definition ist eine Abbildung $\varphi \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ die zusammengesetzte Abbildung $\varphi \circ \varepsilon \colon V_i \to W$ linear ist.

Für die Null-Abbildung $\varphi_0 \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ ist $\varphi_0 \circ \varepsilon$ wieder die Null-Abbildung, also linear. Sodann seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ multilineare Abbildungen und sei $\lambda \in K$. Dann sind $\varphi_1 \circ \varepsilon$ und $\varphi_2 \circ \varepsilon$ linear und folglich auch $(\varphi_1 + \varphi_2) \circ \varepsilon_i = \varphi_1 \circ \varepsilon_i + \varphi_2 \circ \varepsilon_i$ sowie $(\lambda \cdot \varphi_1) \circ \varepsilon = \lambda \cdot (\varphi_1 \circ \varepsilon)$, weil wir bereits wissen, dass jedes skalare Vielfache und jede Summe von linearen Abbildungen wieder linear ist. Durch Variieren von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ und somit von ε folgt, dass φ_0 und $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda \cdot \varphi_1$ multilinear sind.

Zusammen zeigt dies, dass $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum ist.

(b) Für jede Wahl eines Index $1 \leqslant i \leqslant r$ und von Vektoren $v_j' \in V_j'$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\varepsilon' : \ V_i' \longrightarrow V_1' \times \cdots \times V_r', \quad v' \mapsto (v_1', \ldots, v_{i-1}', v', v_{i+1}', \ldots, v_r').$$

Nach Definition ist eine Abbildung $\varphi'\colon V_1' \times \cdots \times V_r' \to W'$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v_1', \ldots, v_{i-1}', v_{i+1}', \ldots, v_r'$ die zusammengesetzte Abbildung $\varphi' \circ \varepsilon'\colon V_i' \to W'$ linear ist. Setzen wir ausserdem $v_j := f_j(v_j')$ für alle $j \neq i$ und $\varepsilon\colon V_i \to V_1 \times \cdots \times V_r$ wie in (a), so gilt $(f_1 \times \cdots \times f_r) \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ f_i$.

Betrachte nun eine multilineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$. Für jede Wahl von $i, v_1', \ldots, v_{i-1}', v_{i+1}', \ldots, v_r'$ und folglich von ε' und ε wie oben ist dann $\varphi \circ \varepsilon\colon V_i \to W$ linear und folglich auch

$$g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) \circ \varepsilon' = g \circ (\varphi \circ \varepsilon) \circ f_i$$

als Verknüpfung von linearen Abbildungen linear. Also ist $g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r)$ multilinear; die Abbildung in der Proposition ist daher wohldefiniert.

Schliesslich betrachte multilineare Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2\colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ und $\lambda \in K$. Weil g eine lineare Abbildung ist, folgt

$$g \circ (\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) = \lambda g \circ \varphi_1 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) + g \circ \varphi_2 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r).$$

Also ist die Abbildung in der Proposition linear.

2. Sei K ein Körper. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n. Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

   (a)
   $$\begin{array}{rccc} D_1: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{rccc} D_2: & K[x]_n & \to & K[x]_n \\ & p(x) & \mapsto & p''(x) \end{array}$$

   Solution:

   (a) Die Darstellungsmatrix von D_1 bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist

   $$[D_1]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 1 und $\dim\ker\left([D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = 1$ sind. Also ist eine Jordannormalform von D der Jordanblock $J_{0,n}$.

(b) Es gilt

$$[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2! & & & \\ & 0 & 0 & 3! & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & \frac{n!}{(n-2)!} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab, dass der einzige Eigenwert 1 und $\dim\ker\left([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = 2$ sind. Jede Jordannormalform besteht also aus zwei Blöcken mit Nullen auf der Diagonalen.

Um die Grösse der Blöcke zu bestimmen, berechnen wir das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Dieses teilt das charakteristische Polynom X^n. Des Weiteren ist für $k \geqslant 1$ die Matrix $([D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k$ die Darstellungsmatrix des Endomorphismus

$$\underbrace{D_2 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_2}_{k \text{ Faktoren}} = \underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{2k \text{ Faktoren}}.$$

Die kleinste Potenz, für welche sie verschwindet ist also $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, was impliziert, dass $X^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ das Minimalpolynom von $[D_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ist. Also hat der grösste Block einer Jordannormalform von D_2 die Grösse $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Da genau zwei Blöcke vorkommen, hat der andere Grösse $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

3. Bestimme die Jordannormalform über $\mathbb{C}$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom mittels Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A - XI_4) &= \begin{vmatrix} -1-X & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -X & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X) \cdot \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \end{vmatrix} \\ &= (X^2+1)^2 \\ &= (X-i)^2(X+i)^2. \end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte von A $\pm i$, wobei beide eine algebraische Vielfachheit von 2 haben. Wir berechnen nun ihre geometrische Vielfachheit:

$$
(A - iI_4) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (-1-i)a - b + d & = \quad 0 \\ \quad -ib + c & = \quad 0 \\ \quad -b - ic & = \quad 0 \\ -2a + c + (1-i)d & = \quad 0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b & = \quad 0 \\ c & = \quad 0 \\ d & = \quad (1+i)a \end{cases}
$$

Daher ist

$$
\ker(A - iI_4) = \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \right)
$$

und $m_g(i) = 1$ ist. Ähnlicherweise finden wir $m_g(-i) = 1$.

Es folgt, dass die Jordan-Normalform von A aus 2 Blöcken der Größe 2 besteht, einem für jeden Eigenwert. Sie kann explizit geschrieben werden als:

$$
\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.
$$

4. Die Jordan-Normalform wird oft mit der Idee motiviert, dass die Matrix möglichst viele Nullen enthalten soll. Wird die Anzahl Nullen aber wirklich von der Jordan-Normalform maximiert? Umgekehrt gefragt: Gibt es eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen enthält als ihre Jordannormalform J?

   Lösung: Für eine nilpotente Matrix A stimmt die Aussage. Denn sei J ihre Jordannormalform mit k Jordanblöcken. Dann hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Kern}(L_A)$ die Dimension k, also hat A den Rang $n-k$. Daher hat A genau $n-k$ linear unabhängige Spalten, also auch mindestens $n-k$ von Null verschiedene Einträge. Dies ist aber genau die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge von J, da jeder Jordanblock der Grösse m zum Eigenwert 0 genau $m-1$ von Null verschiedene Einträge hat. Somit ist die Minimalität für nilpotente Matrizen gegeben.

Im Allgemeinen gilt die Aussage aber nicht. Ein Gegenbeispiel über $\mathbb{Q}$ ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier ist A eine Blockdreiecksmatrix aus 2×2-Blöcken, bei der jeder Block das charakteristische Polynom $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ hat. Also hat A die Eigenwerte ±1 jeweils mit arithmetischer Multiplizität 2. Eine direkte Rechnung zeigt aber, dass jeder Eigenwert die geometrische Multiplizität 1 hat. Daher hat A die angegebene Jordannormalform. Diese enthält 10 Nullen, gegenüber 11 Nullen in A.

Bemerkung: Auch wenn die Jordannormalform weniger Nullen hat als die ursprüngliche Matrix, werden die Rechnungen damit in der Regel trotzdem einfacher, weil die Haupträume nicht mehr durcheinander geworfen werden.

5. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

   Lösung:

   Da B das charakteristische Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$ besitzt, hat der Eigenwert 3 algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -5 algebraische Vielfachheit 3.

   Der Faktor $(X-3)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 1 auf; der grösste Jordan-Block zum Eigenwert 3 ist also ein 1×1-Block. Daher enthält die Jordan-Normalform genau 2 Jordanblöcke der Grösse 1×1 zum Eigenwert 3.

   Der Faktor $(X+5)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 2 auf; es existiert also ein Jordanblock zum Eigenwert -5 der Grösse 2×2. Aus Dimensionsgründen folgt, dass es genau einen weiteren Jordanblock der Grösse 1×1 gibt.

   Für die Jordansche Normalform der Matrix B erhalten wir also bis auf Vertauschen der Jordanblöcke als einzige Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Sei A eine reelle quadratische Matrix. Wir definieren das Exponential einer solchen Matrix als

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

   wenn die Summe konvergiert.

(a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$, berechne $\exp(J_{\lambda,n})$.

(b) Bestimme die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$

zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.
Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform. Wenn Sie weitere Hinweise benötigen, sehen Sie sich Kapitel 9.5 in den Notizen von Menny Akka an.

(c) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$f^{(3)}(t) - f^{(2)}(t) + f'(t) - f(t) = 0.$$

Hinweis: Schreibe die Gleichung als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, und verwende die Jordansche Normalform.

Lösung:

(a) Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass für $k \geqslant 1$ gilt:

$$J_{\lambda,n}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \\ & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots & \\ & & & & \\ & & & & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten besteht die Hauptdiagonale aus λ^k und die i-te Diagonale über der Hauptdiagonale besteht aus $\binom{k}{i}\lambda^{k-i}$, solange $i \leqslant k$. Die Diagonalen danach verschwinden.
Daraus folgt, dass die Einträge auf der Hauptdiagonale von $\exp(J_{\lambda,n})$ gleich sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}.$$

Die Einträge auf der i-ten Diagonale über der Hauptdiagonale sind gleich

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} \frac{\lambda^{k-i}}{k!} &= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{\lambda^{k-i}}{k!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!\ i!} \qquad (\ell := k - i) \\ &= \frac{1}{i!} e^{\lambda}. \end{aligned}$$

(b) Setzen wir

$$v(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 3 & -6 & -8 \\ -4 & 11 & 13 \end{pmatrix}, \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wonach das Gleichungssystem äquivalent ist zu

$$\frac{d}{dt}v(t) = A \cdot v(t) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad v(0) = v\,.$$

Nach §9.6 der Vorlesung ist die eindeutige Lösung $v(t) = \exp(At) \cdot v_0$.
Um diese explizit zu bestimmen, bringen wir A in Jordansche Normalform.
Das charakteristische Polynom von A ist

$$\operatorname{char}_A(X) \;=\; X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \;=\; (X-2)^3\,.$$

Für $B := A - 2I_3$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 9 \\ 3 & -8 & -8 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

und $B^k = 0$ für alle $k \geqslant 3$. Wir wählen irgendeinen Vektor $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Kern}(B^2)$, zum Beispiel

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die Vektoren w, Bw, B^2w eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und mit

$$S := (B^2w, Bw, w) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt die Darstellung von A in Jordanscher Normalform:

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}\,.$$

Aus der Lösung zu Aufgabe 1 der Serie 15 gilt nun für alle $k \geqslant 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Exponentialreihe liefert dann

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{k} t^k = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{aligned} v(t) = \exp(At)\cdot v_0 &= S\cdot\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right)\cdot S^{-1}v \\ &= S\cdot\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right)\cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= -S\cdot\left(e^{2t}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2e^{2t}\begin{pmatrix} [r]5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 15 \\ -13 \\ 18 \end{pmatrix} + t^2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Setzen wir

$$F(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

dann ist die Differentialgleichung der Aufgabe äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}F(t) = A\cdot F(t)\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung mit einem beliebigen Anfangswert

$$F(0) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = v_0$$

ist dann $F(t) = \exp(At)\cdot v_0$, und die allgemeine Lösung für $f(t)$ ist genau der erste Eintrag von $F(t)$.
Nun berechnen wir das charakteristische Polynom von A und finden

$$\mathrm{char}_A(X) = (X-1)(X^2+1)\,.$$

Also ist A eine 3×3-Matrix mit den 3 verschiedenen komplexen Eigenwerten 1 und $\pm i$ und daher diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Daher rechnen wir fürs Erste über $\mathbb{C}$ und reduzieren uns erst am Schluss wieder auf Werte in $\mathbb{R}$. Dafür schreiben wir $A = UJU^{-1}$ mit einer Matrix $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ und

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\exp(At) \cdot v_0 \;=\; \exp(U \cdot Jt \cdot U^{-1}) \cdot v_0 \;=\; U \cdot \exp(Jt) \cdot U^{-1} v_0.$$

Die Exponentialreihe können wir in die Diagonalmatrix Jt hineinziehen und erhalten

$$\exp(Jt) \;=\; \exp\Bigg(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & it & 0 \\ 0 & 0 & -it \end{pmatrix}\Bigg) \;=\; \Bigg(\begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(it) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-it) \end{pmatrix}\Bigg).$$

Somit ist die erste Komponente von $\exp(At) \cdot v_0$ eine Linearkombination der Funktionen $\exp(t)$ und $\exp(\pm it)$ mit konstanten Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Wegen $\exp(\pm it) = \cos(t) \pm i \sin(t)$ ist dies äquivalenterweise eine Linearkombination der Funktionen $\exp(t)$, $\cos(t)$, und $\sin(t)$ mit konstanten Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Damit die Funktion reelle Werte hat, müssen diese Koeffizienten in $\mathbb{R}$ liegen. Also hat jede reelle Lösung die Form

$$f(t) \;=\; ae^t + b\cos(t) + c\sin(t)$$

für Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Umgekehrt überprüfen wir durch direkte Rechnung, dass jede solche Funktion eine Lösung ist.

Aliter für (b): Durch Berechnen einer Jordanbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich A erhalten wir die Jordansche Normalform von A über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Induktion finden wir für alle $m \geqslant 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} = (-1)^k I_2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} = (-1)^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die matrixwertige Exponentialfunktion liefert

$$\begin{aligned} \exp\Bigg(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t\Bigg) \;&=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} \\ &=\; \Bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}\Bigg) \cdot I_2 + \Bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!}\Bigg) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \cos(t) \cdot I_2 + \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt zeigt dies

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\cos(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(t)}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung $f(t)$ ist die erste Komponente von $\exp(At) \cdot v_0$, also gleich

$$f(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)e^t + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)\cos(t) + \frac{1}{2}(-x_1 + 2x_2 - x_3)\sin(t).$$