Musterlösung Serie 13

Diese Serie soll in der Woche vor dem Frühjahrssemester 2023 abgegeben werden.

1. Betrachte den Unterraum

$$U := \left\langle (2,2,2,2,2)^T, (1,2,2,2,2)^T, (1,1,2,2,2)^T \right\rangle$$

von $V := \mathbb{R}^5$. Bestimme eine Teilmenge der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, welche sich bijektiv auf eine Basis von V/U abbildet.

Lösung: Die Teilmenge muss die Basis eines Komplements von U sein. Durch Probieren finden wir zum Beispiel die Lösung

$$\left\{ (0,0,1,0,0)^T, (0,0,0,1,0)^T \right\}$$

2. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Sei ausserdem $U \subseteq V$ ein Unterraum, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Betrachte die von der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums induzierte lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & V/U & \to & W \\ & v+U & \to & f(v) \end{array}$$

Zeige:

(a) $\mathrm{Ker}(\bar{f}) = \mathrm{Ker}(f)/U$.

(b) $\bar{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \mathrm{Ker}(f)$ ist.

(c) $\bar{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

(d) Ist f surjektiv, so induziert f einen Isomorphismus $V/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} W$.

Lösung:

(a) Für die Abbildung $\bar{f} : V/U \to W$ gilt $\bar{f}(x+U) = f(x)$ für alle $x \in V$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\bar{f}) &= \{v + U \mid v \in V \wedge \bar{f}(v+U) = 0\} \\ &= \{v + U \mid v \in V \wedge f(v) = 0\} \\ &= \{v + U \mid v \in \mathrm{Ker}(f)\} \\ &= \mathrm{Ker}(f)/U \end{aligned}$$

(b) $\bar{f}$ ist injektiv $\iff \mathrm{Ker}(\bar{f}) = 0 \iff \mathrm{Ker}(f)/U = 0 \iff \mathrm{Ker}(f) = U$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \\ &= \{w \in W \mid \exists v \in V : \bar{f}(v + U) = w\} \\ &= \{w \in W \mid \exists \bar{v} \in V/U : \bar{f}(\bar{v}) = w\} \\ &= \mathrm{Im}(\bar{f}).\end{aligned}$$

(d) Die induzierte Abbildung $\bar{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to W$ ist wegen (b) injektiv und wegen (c) surjektiv, also ein Isomorphismus.

3. Seien V, W Vektorräume über einen Körper K. Betrachte eine Funktion T von V nach W. Wir definieren den Graph von T, geschrieben als $\Gamma(T)$, als die Teilmenge von $V \oplus W$ definiert durch

$$\Gamma(T) = \{(v, Tv) \in V \oplus W : v \in V\}.$$

Zeige, dass T genau dann eine lineare Abbildung ist, wenn der Graph von T ein Untervektorraum von $V \oplus W$ ist.

Remark. Formal können wir die Funktion $T : V \to W$ als Teilmenge T von $V \oplus W$ auffassen, sodass für jedes $v \in V$ genau ein Element der Form $(v, w) \in T$ existiert. In anderen Worten ist eine Funktion formal das, was wir hier als Graph definieren. Normalerweise denken wir über Funktionen nicht auf diese formale Weise nach. Unter Verwendung dieser formalen Interpretation von T können wir die Aufgabe wie folgt umformulieren: Beweise, dass eine Funktion T von V nach W linear ist genau dann wenn T ein Unterraum von $V \oplus W$ ist.

4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

(a) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und W ein lineares Komplement. Definiere einen Isomorphismus zwischen V und $U \oplus W$.

(b) Zeige, dass jede lineare Abbildung $\alpha : U \to K$ zu einer Abbildung $\tilde{\alpha}$ auf ganz V fortgesetzt werden kann. Hängt $\tilde{\alpha}$ von der Wahl des Komplements von U ab?

(c) Definiere einen Isomorphismus

$$V^* \cong U^* \oplus W^*.$$

Solution:

(a) Aus den Eigenschaften des linearen Komplements wissen wir, dass für jedes $v \in V$ ein eindeutiges $u_v \in U$ und eindeutiges $w_v \in W$ existieren, so dass $v = u_v + w_v$ ist. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & V & \to & U \oplus V \\ & v & \mapsto & (u_v, w_v)\end{array}$$

Mithilfe einer direkten Rechnung lässt sich zeigen, dass diese Abbildung linear ist. Da u_v und w_v das Element v bereits eindeutig bestimmen, ist diese injektiv. Sei $(u, w) \in U \oplus W$. Dann ist

$$(u, w) = \Phi(u + w),$$

was die Surjektivität von Φ beweist.

(b) Sei $\alpha : U \to K$ eine beliebige Linearform. Zu dem Unteraum U wähle ein Komplement U' in V und definiere die Abbildung $\tilde{\alpha} : V \to K$ durch

$$\tilde{\alpha}(v) := \alpha\,(u)$$

für jedes $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$. Wegen U' ein Komplement von U ist, ist $\tilde{\alpha}$ wohldefiniert. Man zeigt nun direkt, dass $\tilde{\alpha}$ auch linear, also ein Element von V^* ist. Wegen $\tilde{\alpha}|_U = \alpha$ ist die Behauptung bewiesen.

(c) Für jede Linearform $\ell : V \to K$ sind die Einschränkungen $\ell|_U : U \to K$ und $\ell|_W : W \to K$ wieder linear. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\psi : V^* \to U^* \oplus W^*, \quad \ell \mapsto (\ell|_U \,, \ell|_W)\,.$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass ψ eine lineare Abbildung ist. Wegen $V = U+W$ ist jede Linearform $\ell : V \to K$ schon durch ihre Einschränkungen auf U und W bestimmt. Also ist ψ injektiv. Weiter betrachte beliebige Linearformen $\ell_1 : U \to K$ und $\ell_2 : W \to K$. Weil jedes Element $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe $u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ geschrieben werden kann, können wir eine wohldefinierte Abbildung $\ell : V \to K$ konstruieren durch $\ell\,(u + w) = \ell_1\,(u) + \ell_2\,(w)$. Man zeigt direkt, dass dieses ℓ linear ist. Aus der Konstruktion folgt ausserdem $\psi(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$. Also ist ψ surjektiv. Somit ist ψ eine bijektive lineare Abbildung, also ein Isomorphismus.

5. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis eines Vektorraums V, sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die dazu duale Basis des Dualraums V^*, und sei $((v_1^*)^*, \ldots, (v_n^*)^*)$ die zu B^* duale Basis des Bidualraums $(V^*)^*$. Zeige, dass der natürliche Isomorphismus

$$\tau : V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*\,, \quad v \mapsto \tau(v)$$

jedes v_j auf das entsprechende $(v_j^*)^*$ abbildet.

Lösung: Die duale Basis ist charakterisiert durch die Bedingung $\ell_i\,(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle i, j. Analog gilt $k_j\,(\ell_i) = \delta_{i,j}$ für alle i, j. Ausserdem ist die Auswertungsabbildung definiert durch $\mathrm{ev}_v(\ell) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ und $\ell \in V^*$. Für alle i, j folgt daraus

$$\mathrm{ev}_{v_j}\,(\ell_i) = \ell_i\,(v_j) = \delta_{i,j} = k_j\,(\ell_i)\,.$$

Somit stimmen die beiden linearen Abbildungen $\tau_{v_j} : V^* \to K$ und $k_j : V^* \to K$ auf der Basis $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ von V^* überein, und sind daher überhaupt gleich.

6. Seien U, V, W_1 und W_2 endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $n := \dim(V)$. Zeige:

   (a) $\mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) \cong \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2)$

   (b) $\mathrm{Hom}(V \oplus U, W_1) \cong \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(U, W_1)$

   (c) $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

   (d) Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V,V) & \to & \mathrm{Hom}(V,V)^* \\ T & \mapsto & [S \mapsto \mathrm{tr}(S \circ T)]\,, \end{array}$$

   wobei $\mathrm{tr} \in \mathrm{Hom}(V,V)^*$ die *Spur* ("trace" auf Englisch) ist, definiert durch

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^{n} ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})_{ii},$$

   für irgendeine Wahl von Basis $\mathcal{B}$ von V.

   Remark. Sie können dies in der obigen Übung verwenden, aber als Bonus könnten Sie zunächst zeigen, dass die Abbildung $T \in \mathrm{Hom}(V,V) \mapsto \mathrm{tr}(T)$ unabhängig von der Wahl der Basis von V ist.

Solution:

(a) Betrachte die Abbildungen

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) & \to & \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2) \\ & \ell & \mapsto & (\mathrm{p}_{W_1} \circ \ell, \mathrm{p}_{W_2} \circ \ell)) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_2) & \to & \mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2) \\ & (\ell_1, \ell_2) & \mapsto & [\ell : v \mapsto (\ell_1(v), \ell_2(v))] \end{array}$$

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert, da die Verkettung linearer Abbildungen wieder linear ist. Die Wohldefiniertheit von Ψ folgt aus den Definitionen der Operationen im Produkt $W_1 \oplus W_2$.

Direkte Rechnungen zeigen

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(V, W_1 \oplus W_2)} \quad \text{und} \quad \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(V,W_1) \oplus \mathrm{Hom}(V,W_2)}\,.$$

Die Linearität der Projektionen ausznutzend ist zeigt eine direkte Rechnung, dass, Φ linear ist. Also ist Φ eine lineare Abbildung mit Inverser Ψ, und somit ein Isomorphismus.

(b) Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Hom}(V \oplus U, W_1) & \to & \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(U, W_1) \\ & \ell & \mapsto & (\ell \circ \iota_V, \ell \circ \iota_U), \end{array}$$

wobei $\iota_V : V \to V \oplus U$ und $\iota_U : U \to V \oplus U$ die kanonischen Einbettungen sind. Betrachte auch

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathrm{Hom}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}(U, W_1) & \to & \mathrm{Hom}(V \oplus U, W_1) \\ & (\ell_1, \ell_2) & \mapsto & [\ell : (v, u) \mapsto (\ell_1(v), \ell_2(u))] \end{array}$$

Die Wohldefiniertheit von Φ und Ψ lässt sich ähnlich wie in (a) zeigen, was wir dem Lesenden überlassen. Ebenfalls wie oben zeigen direkte Rechnungen, dass die Abbildungen sich gegenseitig invers sind. Des Weiteren gilt für $\ell, \ell' \in \mathrm{Hom}(V \oplus U, W_1)$, dass

$$\begin{aligned} \Phi : \ell + \alpha\ell' \mapsto & ((\ell + \alpha\ell') \circ \iota_V, (\ell + \alpha\ell') \circ \iota_U) \\ = & (\ell \circ \iota_V + \alpha(\ell' \circ \iota_V), \ell \circ \iota_U + \alpha(\ell' \circ \iota_U)) \\ = & (\ell \circ \iota_V, \ell \circ \iota_U) + \alpha(\ell' \circ \iota_V, \ell' \circ \iota_U) \\ = & \Phi(\ell) + \alpha\Phi(\ell'). \end{aligned}$$

Also ist Φ eine lineare bijektive Abbildung, und somit ein Isomorphismus.

(c) Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Hom}(V, W) & \to & \mathrm{Hom}(W^*, V^*) \\ & T & \mapsto & [\Phi(T) : \ell \mapsto \ell \circ T,\ \forall \ell \in W^*] \end{array}$$

Zunächst überprüfen wir die Wohldefiniertheit von Φ. Seien dafür $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\ell, \ell' \in W^*$, und $\alpha \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(T)(\ell + \alpha\ell') &= (\ell + \alpha\ell') \circ T \\ &= \ell \circ T + \alpha(\ell' \circ T) \\ &= \Phi(T)(\ell) + \alpha\Phi(T)(\ell'). \end{aligned}$$

Also ist $\Phi(T)$ tatsächlich für alle $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ in $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ enthalten. Als nächstes wollen wir die Injektivität von Φ nachweisen. Sei $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$ und sei $w \in \mathrm{Im}(T) \smallsetminus \{0\}$. Wir setzen $\{w\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von W fort. Definiere eine Abbildung ℓ auf $\mathcal{B}$ durch

$$\ell(w) = 1 \quad \text{and} \quad \forall w' \in \mathcal{B} \smallsetminus \{w\} : \ell(w') = 0$$

und setze diese linear auf W fort. Dann bedeutet $\mathrm{Im}(T) \nsubseteq \ker(\ell)$, dass $\Phi(T)(\ell)$ nicht auf ganz V verschwindet und, dass sommit $\Phi(T)$ nicht die 0-Abbildung ist. Also ist Φ injektiv.

Sei nun $\eta \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, sei $\{e_i\}_{i=1}^{\dim(W)}$ eine Basis von W, aund definiere eine Abbildung $T : V \to W$ durch

$$T(v) := \sum_{i=1}^{\dim(W)} \eta(e_i^*)(v)e_i.$$

Da dies eine endliche Summe ist und $\eta(e_i^*)$ für alle i linear ist, folgt $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Des Weiterenn ist für jedes $\ell \in W^*$ und jedes $v \in V$

$$\begin{aligned}
\Phi(T)(\ell)(v) = \ell \circ T(v) &= \sum_{i=1}^{\dim(W)} \eta(e_i^*)(v)\ell(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\dim(W)} \eta(\ell(e_i)e_i^*)(v) \\
&= \eta\left(\sum_{i=1}^{\dim(W)} \ell(e_i)e_i^*\right)(v) \\
&= \eta(\ell)(v),
\end{aligned}$$

da $\sum_{i=1}^{\dim(W)} \ell(e_i)e_i^* = \ell$ ist. Somit ist die Surjektivität von Φ gezeigt.

(d) Wir zeigen zunächst, dass die Spur basisunabhängig ist. Dazu benutzen wir

Lemma 1. *Für beliebige $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt*

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Beweis. Seien a_{ij}, beziehungsweise b_{ij}, die Einträge von A, beziehungsweise von B. Dann sind die diagonalen Einträge von AB gegeben durch

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

□

Für beliebige Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ von V und $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}([T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}) &= \operatorname{tr}([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) \\
&= \operatorname{tr}([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \\
&= \operatorname{tr}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}),
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus Lemma 1 folgt. Sommit ist die Basisunabhängigkeit gezeigt.
Als nächstes zeigen wir, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}(V,V) & \to & \operatorname{Hom}(V,V)^* \\
T & \mapsto & [S \mapsto \operatorname{tr}(S \circ T)]\,,
\end{array}$$

wohldefiniert ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{array}{cccc}
\operatorname{tr}_T: & \operatorname{Hom}(V,V) & \to & K \\
& S & \mapsto & \operatorname{tr}(S \circ T)
\end{array}$$

linear ist. Dazu verwenden wir:

Lemma 2. *Die Abbildung* $\operatorname{tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ *ist linear. Für jede* $A, B \in M_{n\times n}(K)$, *und jedes* $\alpha \in K$, *gilt*

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \quad \textit{and} \quad \operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A).$$

Beweis. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A+B) &= \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{kk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + b_{kk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \sum_{k=1}^{n} b_{kk} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\alpha A) &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{kk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha a_{kk} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \alpha \operatorname{tr}(A).
\end{aligned}$$

□

Linearität von tr_T. Seien $S, S' \in \mathrm{Hom}(V,V)$ und $\alpha \in K$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_T(S+\alpha S') &= \mathrm{tr}((S+\alpha S')\circ T)\\
&= \mathrm{tr}(S\circ T + \alpha(S'\circ T))\\
&= \mathrm{tr}([S\circ T + \alpha(S'\circ T)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})\\
&= \mathrm{tr}([S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} + \alpha[S']_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})\\
&= \mathrm{tr}([S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) + \alpha\,\mathrm{tr}([S']_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})\\
&= \mathrm{tr}_T(S) + \alpha\,\mathrm{tr}_T(S').
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathrm{tr}_T \in \mathrm{Hom}(V,V)^*$.

Injektivität. Wir zeigen, dass die obige Abbildung injektiv ist. Fixiere dazu T, sodass tr_T die Nullabbildung ist. Dann gilt für alle $S \in \mathrm{Hom}(V,V)$,

$$0 = \mathrm{tr}([S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_{ik}t_{ki},$$

wobei $T = (t_{ij})$ und $S = (s_{ij})$ ist. Fixiere $(m,n) \in \{1,\ldots,n\}^2$. Definiere jetzt $S_{m,n} = (\tilde{s}_{ij}) \in \mathrm{Hom}(V,V)$, so dass alle Einträge von $[S_{m,n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ verschweinden, ausser jenem für $\tilde{s}_{mn} = 1$. Wir folgern

$$0 = \mathrm{tr}([S_{m,n}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = t_{nm}.$$

Da (m,n) beliebig gewählt war, zeigt dies $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 0$. In anderen Worten ist T die Nullabbildung

DA V endlichdimensional ist, ist $\mathrm{Hom}(V,V)$ es auch. Daraus folgt $\dim(\mathrm{Hom}(V,V)) = \dim(\mathrm{Hom}(V,V)^*)$ und somit folgt aus der Injektivität der Abbildung schon, dass sie isomorph ist.

Single Choice. Jede Aufgabe hat genau eine richtige Lösung.

1. Sei $\dim V = 4$. Dann gibt es $\varphi \in V^*$ mit $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 2$.

   (a) Richtig

   ✓ Falsch

   Erklärung: $\varphi \in V^*$ bedeutet dass $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,K)$. Wenn nun $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 2$ wäre, würde aus der Dimensionsformel

   $$\dim V = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$$

   folgen, dass $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 2$. Das ist aber ein Wiederspruch denn $\dim \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \dim K = 1$.

2. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum ist der Dualraum eines anderen endlich-dimensionalen Vektorraumes.

   ✓ Richtig

   (a) Falsch

3. Die Menge der invertierbaren reellen $n \times n$-Matrixen ist...

   ✓ kein reeller Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$

   (a) ein reeller Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$

   Erklärung: Die Menge ist nicht abgeschlossen gegenüber der Addition. In der Tat,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   und die Nullmatrix ist nicht invertierbar.

4. Sei $f : V \to W$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen. Welche der folgenden fünf Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) f ist injektiv.

   (b) Die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ ist surjektiv.

   (c) Das Nullelement von V ist das einzige Element, das auf das Nullelement von W abgebildet wird.

   ✓ Es existiert ein Homomorphismus $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

   (d) Für jedes $v \in V \backslash \{0\}$ existiert ein $\ell \in W^*$ mit $\ell(f(v)) \neq 0$.

   (e) Alle fünf Aussagen sind äquivalent.

   Erklärung: Die Aussage (d) ist äquivalent zur Surjektivität von f, aber nicht zur Injektivität, also nicht zu (a). Dagegen ist (a) ist äquivalent zu $\mathrm{Kern}(f) = 0$, also zu (c). Wenn die Aufgabe korrekt gestellt ist, kann somit nur (d) die richtige Antwort sein. Tatsächlich wurde die Äquivalenz von (a) und (b) in Aufgabe 17 der Wiederholungsserie gezeigt. Schliesslich ist ein Element $w \in W$ ungleich Null genau dann, wenn ein $\ell \in W^*$ existiert mit $\ell(w) \neq 0$. Also ist (e) äquivalent zu $\forall v \in V \backslash \{0\} : f(v) \neq 0$, und folglich ebenfalls zu (a).

Multiple Choice Fragen.

1. Für welche Werte von x ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 3 & x \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar?

   (a) 0

(b) 1

✓ 2

(c) 3

(d) 4