Aufgaben und Lösungsvorschlag
Aufgabe 1 - Rechnungen

1.A1 Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin^2(x)\sin(y)$.

(a) [**2 Punkte**] Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(B)$ des Bereichs

$$B=\{(x,y,z)\in[0,\pi]\times[0,\pi]\times\mathbb{R} : 0\le z\le f(x,y)\}$$

unter dem Graphen von f.

(b) [**2 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss F des Vektorfelds

$$(x,y,z)\mapsto(\sin(x),0,1)$$

durch den Graphen von f von unten nach oben.

Lösung:

(a) $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx\int_0^\pi \sin(y)\,dy=\frac{\pi}{2}\cdot 2=\pi$.

(b) Das Integral der Divergenz $\cos(x)$ über B wird aus Symmetriegründen 0, somit ist nach dem Divergenzsatz der Fluss durch den Graphen von f gleich dem Fluss durch die Grundfläche in Richtung e_3, also π^2.

1.A2 Es sei $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z\le 1\}$. Berechnen Sie

(a) [**2 Punkte**] den Flächeninhalt $A(\partial B)$ (die Oberfläche) sowie

(b) [**2 Punkte**] das Volumenintegral $I=\int_B e^{x^2+y^2}d\mathrm{vol}(x,y,z)$.

Lösung:

(a) Für den parabolischen Teil von ∂B verwendet man die Parametrisierung $\Phi\colon B_1(0)\to\partial S$, $(x,y)\mapsto(x,y,x^2+y^2)$ mit $\|\partial_x\Phi\times\partial_y\Phi\|=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$ und Polarkoordinaten:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\phi=\frac{\pi}{6}\Big[(1+4r^2)^{3/2}\Big]_0^1=\frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1)$$

(vgl. Vorlesung und Beispiel 14.28 im Skript). Zusammen mit der Deckfläche gibt dies $A(\partial B)=\frac{\pi}{6}(5^{3/2}+5)$.

(b) Man rechnet in Zylinderkoordinaten: $I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}} r\,e^{r^2}dr\,dz\,d\phi=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}(e^z-1)\,dz=\pi(e-2)$.

1.A3 Die Ebene $E\subseteq\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $O=(0,0,0)$, $P=(1,0,\frac{1}{2})$ und $Q=(1,1,1)$ schneidet den Einheitswürfel $W=[0,1]^3$ in einem Flächenstück S. Der Rand ∂S sei so orientiert, dass O,P,Q in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Gegeben sei weiter das Vektorfeld

$$f\colon(x,y,z)\mapsto(-y-z^2,x+z^2,y^2-x^2)$$

auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(a) [**1 Punkt**] die Rotation von f und

(b) [**3 Punkte**] das Wegintegral von f entlang von ∂S.

Lösung:

(a) $\mathrm{rot}(f) = 2(y - z, x - z, 1)$.

(b) Eine geeignete Parametrisierung von S ist $\Phi\colon [0,1] \times [0,1] \to S$, $\Phi(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(x + y))$. Es gilt $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ und $\langle \mathrm{rot}(f) \circ \Phi, \partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \rangle = 2$ auf $[0,1] \times [0,1]$. Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\int_{\partial S} \langle f, dx \rangle = \int_S \langle \mathrm{rot}(f), \mathbf{n} \rangle \, dA = \int_0^1 \int_0^1 2 \, dx \, dy = 2.$$

1.A4 Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 5y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(t)$. Bestimmen Sie

(a) [**1 Punkt**] zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 dieser Gleichung sowie

(b) [**3 Punkte**] die Lösung des Anfangwertproblems $y'' - 4y' + 5y = 10e^{-t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösung:

(a) Die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms sind $2 \pm i$, somit sind $y_1 = e^{2t} \sin(t)$ und $y_2 = e^{2t} \cos(t)$ zwei linear unabhängige (reelle) Lösungen.

(b) Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist e^{-t}. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung und ihre Ableitung sind

$$\begin{aligned} y &= e^{2t}\Big(A \sin(t) + B \cos(t)\Big) + e^{-t}, \\ y' &= e^{2t}\Big((2A - B) \sin(t) + (A + 2B) \cos(t)\Big) - e^{-t}. \end{aligned}$$

Die gegebene Anfangsbedingung führt somit auf das Gleichungssystem

$$B + 1 = 0, \quad A + 2B - 1 = 0$$

mit der Lösung $A = 3$, $B = -1$. Das Anfangswertproblem hat also die Lösung $y = e^{2t}(3 \sin(t) - \cos(t)) + e^{-t}$.

Aufgabe 2 - Multiple choice Aufgabe

Es kann jeweils 0-4 richtige Antworten geben. Sie erhalten pro Teilaufgabe 3 Punkte für die vollständig richtige Lösung, 2 Punkte bei einem Fehler und sonst 0 Punkte.

2.MC1 [**3 Punkte**] Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine surjektive stetige Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(A) Ist X vollständig, so ist Y vollständig.

(B) Ist X total beschränkt, so ist Y total beschränkt.

(C) Ist X kompakt, so ist Y vollständig und total beschränkt.

(D) Ist X kompakt und f injektiv, so ist f^{-1} stetig.

Lösung:

(a) F, (b) F, (c) W, (d) W.

2.MC2 [**3 Punkte**] Sei $n \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit Gradientenvektorfeld $\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(A) Ist $\nabla f(x) = 0$ für alle $x \in U$, so ist f konstant.

(B) Ist ∇f stetig, so ist f lokal Lipschitz-stetig.

(C) Ist U konvex und ∇f beschränkt, so ist f Lipschitz-stetig.

(D) Sind U und ∇f beschränkt, so ist auch f beschränkt.

Lösung:

(a) W, (b) W, (c) W, (d) F.

2.MC3 [**3 Punkte**] Welche der folgenden Mengen sind 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$?

(A) Die Menge $f^{-1}\{r\}$ für die Funktion f wie in Aufgabe 1.A1 und für jedes $r \in (0, 1)$.

(B) Das Bild der Kurve $\gamma\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$.

(C) Das Bild der Kurve $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto e^{-t}(\cos(t), \sin(t))$.

(D) Die Menge $\{(t, \sin(1/t)) : t \in (0, \infty)\} \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Lösung:

(a) W, (b) F, (c) W, (d) F.

2.MC4 [**3 Punkte**] Für welche der folgenden Differentialgleichungen für eine reelle Funktion $y = y(x)$ bildet die Menge aller Lösungen einen 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(A) $y'' + \sin(x)y' + e^x y = 0.$

(B) $y'' + y' = 1.$

(C) $(y')^2 - y^2 = 0.$

(D) $y''' + y' = 0.$

Lösung:

(a) W, (b) F, (c) F, (d) F.

Aufgabe 3 - Theorie und Anwendungen

3.A1 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ *zweimal* stetig differenzierbar.

(a) [**1 Punkt**] Formulieren Sie die quadratische Approximationsformel für f (mittels Gradient und Hesse-Matrix) an einer Stelle $x \in U$.

(b) [**3 Punkte**] Zeigen Sie: Ist x ein kritischer Punkt von f und ist die mit der Hesse-Matrix $H(x)$ von f assoziierte quadratische Form Q positiv definit, so nimmt f an der Stelle x ein *striktes* lokales Minimum an.

(c) [**2 Punkte**] Zeigen Sie: Ist f harmonisch und nimmt f in $x \in U$ ein lokales Minimum an, so ist f in einer Umgebung von x konstant. (Formulieren Sie die verwendeten Eigenschaften harmonischer Funktionen genau – diese müssen Sie nicht beweisen).

Lösung:

(a) $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}h^{\mathrm{t}}H(x)h + o(\|h\|^2)$ für $h \to 0$. (Vgl. Korollar 11.25. Die in der Formelsammlung angegebene Formel mit dem Fehlerterm $O(\|h\|^3)$ gilt für *dreimal* stetig differenzierbare Funktionen.)

(b) Es gilt $Q(h) = h^{\mathrm{t}}H(x)h > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ kompakt ist (Satz von Heine–Borel), nimmt die stetige Funktion $Q|_{S^{n-1}}$ ein Minimum $c > 0$ an. Mit $\nabla f(x) = 0$ und (a) folgt

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2}\|h\|^2 Q(h/\|h\|) + o(\|h\|^2) \geq \frac{1}{2}\|h\|^2 c + o(\|h\|^2)$$

für $h \to 0$. Ist $\|h\| > 0$ klein genug, sodass der Term $o(\|h\|^2)$ grösser gleich $-\frac{1}{4}\|h\|^2 c$ ist, so gibt dies $f(x+h) - f(x) \geq \frac{1}{4}\|h\|^2 c > 0$.

(c) Ist f harmonisch, so gilt für jeden abgeschlossenen Ball $\overline{B_r(x)} \subset U$ mit $r > 0$ die Mittelwerteigenschaft

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, d\mathrm{vol}(y) = f(x)$$

(Korollar 14.45). Ist zudem $f(y) \geq f(x)$ für alle $y \in \partial B_r(x)$, so folgt mittels Monotonie des Integrals und Stetigkeit von f, dass $f(y) = f(x)$ für alle $y \in \partial B_r(x)$. Nimmt f in x ein lokales Minimum an, so gilt dies für alle genügend kleinen $r > 0$.

3.A2 Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) [**2 Punkte**] Gibt es zu f ein Potential $F\colon U \to \mathbb{R}$, so ist f konservativ.

(b) [**4 Punkte**] Ist f konservativ, so besitzt f ein Potential F.

(c) [**2 Punkte**] Ist f stetig differenzierbar und besitzt f ein Potential, so erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Lösung:

(a) Es sei $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $f = \nabla F$. Ist $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine stückweise C^1-Kurve von x nach y mit Zerlegung $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_K = b$, so gilt für jedes Teilintervall $[s_{k-1}, s_k]$:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_k} \langle \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_{s_{k-1}}^{s_k} (F \circ \gamma)'(t)\, dt = F(\gamma(s_k)) - F(\gamma(s_{k-1})).$$

Summation über $k \in \{1, \ldots, K\}$ gibt $\int_\gamma \langle f, dx\rangle = F(y) - F(x)$, unabhängig von der Wahl von γ.

(b) Sei $x_0 \in U$ ein fester Punkt. Für $x \in U$ setzt man $F(x) = \int_\gamma \langle f, dx\rangle$ für einen beliebigen stückweise C^1-Weg von x_0 nach x; da f konservativ ist, ist $F\colon U \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Um zu zeigen, dass F ein Potential von f ist, sei $x \in U$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für $\delta \in (0,1)$ klein genug sei $\gamma\colon [0, 1+\delta] \to U$ ein stückweise C^1-Weg mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(t) = x + (t-1)e_j$ für alle $t \in [1-\delta, 1+\delta]$. Für $h \in [-\delta, \delta]$ gilt dann

$$\begin{aligned} F(x + he_j) - F(x) &= \int_{\gamma|_{[0,1+h]}} \langle f, dx\rangle - \int_{\gamma|_{[0,1]}} \langle f, dx\rangle \\ &= \int_1^{1+h} \langle f(x + (t-1)e_j), e_j\rangle \, dt = \int_0^h f_j(x + se_j)\, ds. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von f_j folgt $\partial_j F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_j(x + se_j)\, ds = f_j(x)$. Da dies für alle $x \in U$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, ist F stetig differenzierbar mit Gradient $\nabla F = f$.

(c) Ist f konservativ und C^1, so existiert ein $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla F = f$, und alle partiellen Ableitungen $\partial_j F = f_j$ sind C^1. Somit sind alle zweiten partiellen Ableitungen $\partial_k(\partial_j F) = \partial_k f_j$ stetig, d.h. F ist C^2, und nach dem Satz von Schwarz gilt $\partial_k f_j = \partial_k \partial_j F = \partial_j \partial_k F = \partial_j f_k$.

3.A3 Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ferner gebe es ein $\alpha > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \alpha \|x - y\|$$

für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie:

(a) [**2 Punkte**] Das Bild $V = f(U)$ ist offen in $\mathbb{R}^n$ und f ist ein C^1-Diffeomorphismus von U auf V.

(b) [**2 Punkte**] Im Fall $U = \mathbb{R}^n$ ist $V = \mathbb{R}^n$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass V abgeschlossen ist.)

Lösung:

(a) Für sämtliche Richtungsableitungen gilt

$$\|D_x f(v)\| = \|\partial_v f(x)\| = \lim_{s\to 0} \frac{\|f(x + sv) - f(x)\|}{s} \geq \alpha > 0$$

($x \in U$, $\|v\| = 1$), somit hat das Differential $D_x f$ trivialen Kern, ist also invertierbar. Ausserdem ist f injektiv, die Aussage folgt daher aus dem Satz über die globale Invertierbarkeit (Korollar 12.8).

(b) Es sei $(y_n)_n$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $y_n \in V$ und Grenzwert $y \in \mathbb{R}^n$. Für die Folge der Urbildpunkte $x_n = f^{-1}(y_n)$ gilt $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\|$. Da $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist,

ist also auch $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Ist $x \in \mathbb{R}^n = U$ ihr Grenzwert, so folgt $y = f(x) \in V$ aufgrund der Stetigkeit von f. Dies zeigt, dass $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist (Lemma 10.7). Da V auch offen und $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist, ist $V = \mathbb{R}^n$.

3.A4 [4 Punkte] Bestimmen Sie die Eckpunkte und das Volumen des (eines?) achsenparallelen Quaders grössten Volumens, welcher ganz im Ellipsoid

$$E := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

mit $a, b, c > 0$ enthalten ist.

Lösung:

Aufgrund der Symmetrie besitzt ein solcher Quader einen Eckpunkt $(x, y, z) \in \partial E$ mit $x, y, z > 0$, und dabei wird xyz maximal. Die Methode von Lagrange führt auf das Gleichungssystem

$$yz = \frac{2x\lambda}{a^2}, \quad xz = \frac{2y\lambda}{b^2}, \quad xy = \frac{2z\lambda}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Es folgt $2x^2\lambda/a^2 = xyz = 2y^2\lambda/b^2$, also $x^2/a^2 = y^2/b^2$ und analog $x^2/a^2 = z^2/c^2$ (der Fall $\lambda = 0$ kann ausgeschlossen werden). Einsetzen in die vierte Gleichung gibt $x^2 = a^2/3$, $y^2 = b^2/3$, $z^2 = c^2/3$. Somit sind $(1/\sqrt{3})(\pm a, \pm b, \pm c)$ die Eckpunkte, und das Volumen ist $8abc/(\sqrt{3})^3$.