Lösungen zur Übungsserie 1

Aufgabe 1. Wir betrachten $a < b$ in $\mathbb{R}$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ und den Rotationskörper

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b, 0 \le \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x) \right\},$$

und definieren das Volumen des Rotationskörpers durch

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

und die Oberfäche durch

$$2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} f(x) dx.$$

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des 'uneigentlichen Rotationskörpers', der entsteht, wenn man das Gebiet unter dem Graphen der Funktion $x \in [1, \infty)$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ um die x-Achse rotiert.

Lösung. Um das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen müssen wir das folgende Integral berechnen

$$\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi(-x^{-1} \mid_1^\infty) = \pi(0 - (-1)) = \pi.$$

Um die Oberfläche des Rotationskörpers zu berechnen müssen wir das folgende Integral berechnen

$$2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + x^{-4}}}{x} dx.$$

Wir bemerken, dass

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + x^{-4}}}{x} dx \ge \int_1^\infty \frac{1}{x} dx,$$

und das zweitere Integral divergiert. Damit divergiert auch das zu berechnende Integral, und wir erhalten, dass die Oberfläche des uneigentlichen Rotationskörpers unendlich ist. □

Aufgabe 2. Für eine reguläre ebene C^2-Kurve $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, definiert man die Krümmung an der Stelle t durch

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t))}{\|\dot\gamma(t)\|^3} = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \dot y(t)\ddot x(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^3}.$$

(1) Berechnen Sie die Krümmung der Kurven $t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ $(r > 0)$ und $t \longmapsto (t, \sin(t))$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Wie verhält es sich mit dem Vorzeichen der Krümmung?

(2) Zeigen Sie: Ist $\gamma \circ \psi \colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^2-Reparametrisierung von $\gamma \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt $\kappa_{\gamma\circ\psi}(s) = \kappa_\gamma(\psi(s))$ für alle $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Lösung.

(1) Seien $\gamma_1(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$ und $\gamma_2(t) = (t, \sin(t))$. Um die Krümmungen zu berechnen, müssen wir zunächst $\dot{\gamma}_{1,2}$ und $\ddot{\gamma}_{1,2}$ berechnen.

Wir haben

$$\dot{\gamma}_1(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)),\ \ddot{\gamma}_1(t) = (-r\cos(t), -r\sin(t)).$$

Damit erhalten wir

$$\kappa_{\gamma_1}(t) = \frac{(-r\sin(t)(-r\sin(t)) - (r\cos(t))(-r\cos(t))}{\sqrt{r^2(\sin^2(t)+\cos^2(t))}^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Damit ist die Krümmung für alle $t \in [0, 2\pi]$ konstant gleich $1/r > 0$.

Für γ_2 berechnen wir

$$\dot{\gamma}_2(t) = (1, \cos(t)),\ \ddot{\gamma}_2(t) = (0, -\sin(t)).$$

Damit erhalten wir

$$\kappa_{\gamma_2}(t) = \frac{-\sin(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}^3}.$$

Damit ist die Kurve für alle $t \in [0, \pi]$ negativ gekrümmt und für $t \in [\pi, 2\pi]$ positiv gekrümmt.

(2) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\kappa_{\gamma\circ\psi}(s) &= \frac{\det((\gamma\circ\psi)'(s), (\gamma\circ\psi)''(s))}{\|(\gamma\circ\psi)'(s)\|^3} \\
&= \frac{(x\circ\psi)'(s)(y\circ\psi)''(s) - (y\circ\psi)'(s)(x\circ\psi)''(s)}{\|(\gamma\circ\psi)'(s)\|^3} \\
&= \frac{x'(\psi(s))\psi'(s)(y'(\psi(s))\psi'(s))' - y'(\psi(s))\psi'(s)(x'(\psi(s))\psi'(s))'}{\|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\|^3} \\
&= \frac{x'(\psi(s))\psi'(s)\,(y''(\psi(s))\psi'(s)^2 + y'(\psi(s))\psi''(s))}{\|\gamma'(\psi(s))\|^3|\psi'(s)|^3} \\
&\qquad - \frac{y'(\psi(s))\psi'(s)\,(x''(\psi(s))\psi'(s)^2 + x'(\psi(s))\psi''(s))}{\|\gamma'(\psi(s))\|^3|\psi'(s)|^3} \\
&= \frac{x'(\psi(s))y''(\psi(s))\psi'(s)^3 - y'(\psi(s))x''(\psi(s))\psi'(s)^3}{\|\gamma'(\psi(s))\|^3|\psi'(s)|^3} \\
&= \frac{\psi'(s)^3}{|\psi'(s)|^3}\kappa_\gamma(\psi(s))
\end{aligned}$$

Da eine Reparametrisierung nach Definition orientierungs-erhaltend ist, gilt $\frac{\psi'(s)^3}{|\psi'(s)|^3} = 1$ für alle t und somit folgt die Aussage.

$\square$

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$d_{1/2}(x,y) := \sqrt{d(x,y)} \text{ und } \tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

für $x, y \in X$ zwei Metriken auf X definieren.

Lösung.

(1) Wir zeigen, dass $d_{1/2}$ eine Metrik auf X ist. Seien $x, y, z \in X$
- $d_{1/2}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, da d eine Metrik ist.
- $d_{1/2}(x,y) = \sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)} = d_{1/2}(y,x)$, da d eine Metrik ist.
- $d_{1/2}(x,z) = \sqrt{d(x,z)} \leq \sqrt{d(x,y)+d(y,z)}$, da d eine Metrik ist. Die Dreiecksungleinchung für $d_{1/2}$ folgt dann aus folgenden Lemma:
  Lemma. Seien $a, b \geq 0$, dann gilt $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
  Beweis. Es gilt $a + b \leq a + 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

(2) Wir zeigen, dass $\tilde{d}$ eine Metrik auf X ist. Seien $x, y, z \in X$
- $\tilde{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \tilde{d}(y,x)$.
- Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ given by

$$f(t) := \frac{t}{1+t}$$

  Dann ist $\tilde{d}(x,z) = f(d(x,z))$. Wir berechnen f':

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (1+t) - t \cdot 1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

  Insesondere ist f monoton wachsend, da $\frac{1}{(1+t)^2} \geq 0$ für alle $t \in [0,\infty)]$. Dann gilt es

$$f(d(x,z)) \leq f(d(x,y) + d(y,z))$$

  und dann

$$\begin{aligned} f(d(x,y)+d(y,z)) &= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Zeigen Sie, dass Y° eine offene Teilmenge von X ist und jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ enthält.

(2) Zeigen Sie, dass $\overline{Y}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist und in jeder abgeschlossenen Teilmenge $Y \subseteq A$ enthalten ist.

(1) Wir haben Y° als $Y^\circ = \{x \in Y \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq Y\}$ definiert und wollen zeigen, dass $Y^\circ \subseteq X$ offen ist. Sei dazu $y \in Y^\circ$. Nach Definition von Y° existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subseteq Y$. Wir müssen zeigen, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq Y^\circ$. Sei dazu $x \in B_\varepsilon(y)$. Da $B_\varepsilon(y)$

offen ist existiert $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq Y$. Aber das heisst nichts anderes, als dass $x \in Y^\circ$. Da $x \in B_\varepsilon(y)$ beliebig, folgt $B_\varepsilon(y) \subseteq Y^\circ$, was zu zeigen war.

Sei $U \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $U \subset Y^\circ$. Da U offen ist gilt für jedes $u \in U$, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U \subseteq Y$. Nach Definition ist damit $u \in Y^\circ$.

(2) Wir haben $\overline{Y}$ als $\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ definiert, wobei

$$\partial Y = \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \varnothing \neq B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus Y) \text{ für alle } \varepsilon > 0\}.$$

Wir zeigen, dass $X \setminus \overline{Y}$ offen ist. Sei $x \in X \setminus \overline{Y}$ beliebig, so gilt für alle $\epsilon > 0$, dass $B_\epsilon(x) \cap (X \setminus Y) \neq \varnothing$. Wir wissen es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \cap Y = \varnothing$, da sonst $x \in \partial Y \subseteq \overline{Y}$. Demnach ist $B_\epsilon(x) \cap \overline{Y} = \varnothing$, was bedeutet, dass $B_\epsilon(x) \subseteq X \setminus \overline{Y}$. Also ist $X \setminus \overline{Y}$ offen, was nach Definition 10.3 bedeutet, dass $\overline{Y}$ abgeschlossen ist.

Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $Y \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{Y} \subseteq A$. Es gilt für $x \in X$, dass $x \in \overline{Y}$ genau dann, wenn x ein Häufungspunkt von Y ist. Sei $x_0 \in \overline{Y}$. Damit ist x_0 ein Häufungspunkt von $Y \subset$ und da A abgeschlossen ist, ist $x \in A$ und somit $\overline{Y} \subseteq A$.

Aufgabe 5. (Traktrix/Schleppkurve). Eine stetig differenzierbare Funktion $x\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $t \longmapsto x(t)$, werde so gewählt, dass $x(0) = 0$ gilt und die Kurve $\gamma\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), e^{-t})$, nach Bogenlänge parametrisiert sei.

(1) Bestimmen Sie $t \longmapsto x(t)$ und skizzieren Sie die Kurve γ.

Hinweis: Die zweite Komponente von $\gamma(t) + \dot\gamma(t)$ ist stets null. Was bedeutet dies geometrisch?

(2) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa_\gamma(t)$ für $t > 0$ und untersuchen Sie das Verhalten für $t \longrightarrow 0$ und $t \longrightarrow \infty$.

Lösung.

(1) Wir wollen $x(t)$ so wählen, dass $x(0) = 0$ und $\|\dot\gamma(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt. Wir haben

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot x(t)^2 + e^{-2t},$$

und damit gilt

$$\dot x(t)^2 = 1 - e^{-2t},\ \dot x(t) = \sqrt{1 - e^{-2t}}.$$

Eine Lösung mit $x(0) = 0$ ist gegeben durch

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2s}} ds.$$

(2) Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, vereinfacht sich die Berechnung der Krümmung wie folgt. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\kappa_\gamma(t) &= \dot x(t)e^{-t} - \ddot x(t)(-e^{-t}) \\ &= \left(\sqrt{1 - e^{-2t}} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\right) e^{-t} \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\end{aligned}$$

Für $t \longrightarrow 0$ und $t > 0$ erhalten wir

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \kappa_\gamma(t) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} = \infty.$$

Für $t \longrightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \kappa_\gamma(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} = 0.$$

□

Aufgabe 6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(1) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen auf V die gleiche Topologie und den gleichen Konvergenzbegriff induzieren.

(2) Zeigen Sie, dass die Normäquivalenz (wie der Name sagt) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V definiert.

Erinnerung (Definition 10.8): Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V sind äquivalent falls $c, C > 0$ existieren so dass

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\|$$

für alle $v \in V$ gilt.

Lösung.

(1) Wir zeigen zunächst, dass äquivalente Normen den gleichen Konvergenzbegriff induzieren. Seien dazu $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf V, d.h. es existiert $c, C > 0$ mit $c\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$. Sei nun $(v_n)_n$ in V eine Folge, die bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen $v \in V$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\|v_n - v\|_1 < c\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit gilt

$$\|v_n - v\|_2 \leq \tfrac{1}{c}\|v_n - v\|_1 < \varepsilon,$$

und damit konvergiert $(v_n)_n$ auch bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen v, was zu zeigen war. Die andere Richtung funktioniert analog.

Wir verwenden die Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen durch Konvergenz, siehe Lemma 10.7. Sei $O \subset V$ eine offene Menge bezüglich der von $\|\cdot\|_1$ induzierten Topologie. Wir wollen zeigen, dass O auch offen ist bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Topologie. Dazu nehmen wir eine bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergente Folge in V mit Grenzwert in O und wollen zeigen, dass fast alle Folgenglieder in O liegen. Dies impliziert nach Lemma 10.7, dass O offen bezüglich der von $\|\cdot\|_2$ induzierten Topologie ist. Wir haben bereits gesehen, dass eine bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergente Folge in V mit Grenzwert in O auch konvergent bezüglich $\|\cdot\|_1$ mit gleichem Grenzwert ist, und da O offen bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, folgt, wieder mit Lemma 10.7, dass fast alle Folgenglieder in O liegen, was zu zeigen war. Die andere Richtung funktioniert analog.

(2) Wir wollen zeigen, dass Äquivalenz von Normen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Es gilt $\|\cdot\|$ ist äquivalent zu sich selbst. Seien nun $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf V, d.h. es existiert $c, C > 0$ mit $c\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$. Dann gilt auch $\frac{1}{C}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \frac{1}{c}\|\cdot\|_1$, und dies zeigt reflexiv. Seien nun $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$

zwei äquivalente Normen auf V mit Konstanten $c, C > 0$, und $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_3$ zwei äquivalente Normen auf V mit Konstanten $k, K > 0$. Dann gilt

$$ck\|\cdot\|_3 \leq c\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2 \leq CK\|\cdot\|_3,$$

und damit sich auch $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_3$ äquivalent.

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Beispiele sind metrische Räume?

		W
(a)	$(\mathrm{B}(X), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{B}(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nicht-leeren Menge X nach $\mathbb{R}$ bezeichnet und $$\mathrm{d}(f,g) := \sup_{x \in X} \lvert f(x) - g(x)\rvert$$ für $f, g \in \mathrm{B}(X)$.	X
(b)	$((0,\infty), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y) := \left\lvert \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right\rvert$ für $x, y \in (0,\infty)$.	X
(c)	$(\{0,1\}^{2023}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y)$ die Anzahl der Stellen bezeichnet, in der sich zwei Elemente $x, y \in \{0,1\}^{2023}$ unterscheiden.	X
(d)	$(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ für Vektoren $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.	

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	$\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$	X
(f)	$\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \subseteq \overline{Y_1 \cap Y_2}$	
(g)	$\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$	X
(h)	$\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$	

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir definieren die Funktion

$$d(\cdot, A) : X \longrightarrow [0, \infty)$$

via $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$. Was gilt im Allgemeinen?

		W
(i)	Ist A abgeschlossen und $x \in A^c$, dann gilt $d(x, A) > 0$.	X
(j)	Die Menge $M := \{x \in X \,\|\, d(x, A) \geq 1\}$ ist abgeschlossen in X.	X
(k)	Für $x, y \in X$ gilt $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$	X
(l)	Ist A° nicht-leer und ist $x \in X$, dann ist $d(x, A) = d(x, A^\circ)$.	