Lösungen zur Übungsserie 2

Aufgabe 1. (Stetige Funktionen durch Fallunterscheidung). Seien X, Y zwei metrische Räume und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ zwei abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$. Angenommen $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ sind zwei stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die damit wohldefinierte Funktion

$$f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1, \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung. Sei $C \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) = X \cap f^{-1}(C) &= (A_1 \cup A_2) \cap f^{-1}(C) \\ &= \big(A_1 \cap f^{-1}(C)\big) \cup \big(A_2 \cap f^{-1}(C)\big) \\ &= \big(f|_{A_1}^{-1}(C)\big) \cup \big(f|_{A_2}^{-1}(C)\big) \\ &= \big(f_1^{-1}(C)\big) \cup \big(f_2^{-1}(C)\big). \end{aligned}$$

Da beide Urbilder abgeschlossen sind und die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen ist, ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen. Vergleichen wir mit Proposition 10.24 (vi), so ist f demnach stetig. □

Aufgabe 2. (Zusammenhang vs. Wegzusammenhang). Zeigen Sie, dass der Teilraum

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \sqcup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Lösung. Wir betrachten die Menge

$$Y = \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Sie ist zusammenhängend, als Bild der zusammenhängenden Menge $(0, 1]$ unter der stetigen Abbildung $f \colon x \longmapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$ (Proposition 10.29). Die Behauptung ist, dass $X = \overline{Y}$ gilt. Dann wäre X als Abschluss einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend (zu beweisen).
In der Tat gilt, sei $\overline{Y} = U \cup V$ für disjunkte, nichtleere, in $\overline{Y}$ offene Teilmengen U, V von $\overline{Y}$. Wir wollen daraus einen Widerspruch zum Zusammenhang von Y herleiten. Dazu beachten wir, dass $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ eine Zerlegung von Y in disjunkte, in Y offene Teilmengen ist. Per Annahme ist U nichtleer; sei also $x \in U$. Dann ist wegen $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ entweder $x \in Y$

oder $x \in \partial Y$. In ersterem Fall ist $U \cap Y \neq \varnothing$. In letzterem Fall können wir die Offenheit von U in $\overline{Y}$ verwenden um ein $\epsilon > 0$ zu finden mit $B_\epsilon(x) \cap \overline{Y} \subset U$. Wegen $x \in \partial Y$ wissen wir aber $B_\epsilon(x) \cap Y \neq \varnothing$, sodass auch hier $U \cap Y \neq \varnothing$ erfüllt ist. In jedem Fall ist also $U \cap Y$ nichtleer, und dasselbe Argument zeigt, dass auch $V \cap Y$ nichtleer ist. Wir haben also eine Zerlegung $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$ von Y in disjunkte, nichtleere, in Y offene Teilmengen gefunden, im Widerspruch zum Zusammenhang von Y. Damit ist gezeigt, dass $\overline{Y}$ zusammenhängend ist.
Für den Beweis der Behauptung sei zuerst $(x, y) \in \overline{Y}$. Dann gibt es nach Übung 10.18 eine Folge $(x_n, y_n)_n$ in Y mit $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ für $n \longrightarrow \infty$. Da alle x_n in $(0, 1]$ und alle y_n in $[-1, 1]$ liegen, wissen wir $x \in [0, 1]$ und $y \in [-1, 1]$. Ist $x = 0$, so folgt also direkt $(x, y) \in X$. Im Fall $x > 0$ folgt aus der Stetigkeit der oben definierten Abbildung f aber $y = \sin(\frac{1}{x})$, also $(x, y) \in Y \subset X$. In beiden Fällen ist also $(x, y) \in X$, sodass die Inklusion $\overline{Y} \subset X$ gezeigt ist. Nun sei $(x, y) \in X$. Falls $(x, y) \in Y$ gilt, ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass $(x, y) \in X \setminus Y$, d.h. $x = 0$ und $y \in [-1, 1]$. Wegen $\sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$ finden wir ein $s_0 \in [0, 2\pi]$ mit $\sin(s_0) = y$. Aufgrund der Periodizität des Sinus gilt dann auch $\sin(s_n) = y$ für $s_n := s_0 + 2\pi n$. Die Folge $(\frac{1}{s_n}, \sin(s_n))_n$ liegt dann in Y und konvergiert per Konstruktion gegen $(x, y) = (0, y)$, sodass $(x, y) \in \overline{Y}$ folgt. Damit ist auch die andere Inklusion $X \subset \overline{Y}$ gezeigt. Zusammen haben wir also $X = \overline{Y}$, und damit wie oben erklärt den Zusammenhang von X bewiesen.
Nun zum Wegzusammenhang. Nehmen wir dafür an, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0, 1] \longrightarrow X$ ist ein stetiger Weg von $(0, 0)$ nach $(1, \sin(1))$. Wir betrachten den Zeitpunkt

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) = 0\}.$$

Dann ist $0 \leq t_0 < 1$ und für $t_0 < t < 1$ ist stets $\gamma_1(t) > 0$, sodass aufgrund des Zwischenwertsatzes $\gamma_1([t_0, t])$ eine rechtsseitige Umgebung von 0 enthält. Wähle nun $y \in [-1, 1]$ mit $y \neq \gamma_2(t_0)$. Wie schon gezeigt existiert dann eine Folge $(x_n, y_n)_n$ in Y mit $(x_n, y_n) \longrightarrow (0, y)$ für $n \longrightarrow \infty$. Für grosse k finden wir also Indizes n_k mit $x_{n_k} \in \gamma_1([t_0, t_0 + \frac{1}{k}])$. O.B.d.A. können wir $n_{k+1} > n_k$ annehmen. D.h. es gibt Zeitpunkte $t_k \in [t_0, t_0 + \frac{1}{k}]$ mit

$$\gamma_1(t_k) = x_{n_k}.$$

Wegen $x_{n_k} > 0$ gilt $\gamma(t_k) \in Y$, also zwangsläufig $\gamma_2(t_k) = y_{n_k}$, und nach Wahl der t_k auch $t_k \searrow t_0$ für $k \longrightarrow \infty$. Dies ergibt den Widerspruch

$$\gamma(t_k) = (x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow (0, y) \neq \gamma(t_0)$$

zur Stetigkeit von γ. Die Menge X kann also nicht wegzusammenhängend sein. $\square$

Aufgabe 3. (1) Auf einem metrischen Raum X sei eine Relation so erklärt, dass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn ein Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ von x nach y existiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(2) Zeigen Sie: Ist $X \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ eine offene Teilmenge, so sind die Äquivalenzklassen von $\sim$ offen und abgeschlossen in X.

(3) Schliessen Sie aus (b), dass eine nicht-leere offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^d$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn O zusammenhängend ist.

Lösung.

(1) Zunächst gilt $x \sim x$ für alle $x \in X$. Definiere hierfür den konstanten Weg

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow X, \\ t &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Gilt $x \sim y$ für $x, y \in X$ mit Weg γ, so definiere den Weg

$$\begin{aligned} \gamma^- \colon [0,1] &\longrightarrow X, \\ t &\longmapsto \gamma(1-t). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist γ^- stetig und es gilt $\gamma^-(0) = \gamma(1) = y$ sowie $\gamma^-(1) = \gamma(0) = x$. Sind nun $x \sim y$ und $y \sim z$ jeweils über die Wege γ_{xy} und γ_{yz}, so definiere

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} \colon [0,1] &\longrightarrow X, \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_{xy}(2t), & t < 0.5, \\ \gamma_{yz}(2t-1), & t \geq 0.5. \end{cases} \end{aligned}$$

Dieser Weg von x nach z ist ebenfalls stetig und definiert so $x \sim z$.

(2) Sei $x_0 \in X$ beliebig. Definiere die Weg-Äquivalenzklasse von x_0 durch

$$K_{x_0} := \{x \in X \mid x_0 \sim x\}.$$

Sei nun $x \in K_{x_0}$. Da X offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ sodass $B_\epsilon(x) \subseteq X$. Für alle $y \in B_\epsilon(x)$ lässt sich nun ein Weg γ_{xy} über $\gamma_{xy}(t) = (1-t)x + ty$ definieren. Also $x \sim y$ für alle $y \in B_\epsilon(x)$. Da $\sim$ transitiv ist, gilt also auch $x_0 \sim y$ und somit $y \in K_{x_0}$. Also ist K_{x_0} offen in X.
Für alle $x \in X \backslash K_{x_0}$ gilt nun $x \nsim x_0$. Es existiert also ein $\epsilon > 0$ sodass $B_\epsilon(x) \cap K_{x_0} = \varnothing$, denn sonst liese sich ein Pfad $x_0 \sim y$ zu einem Punkt $y \in B_\epsilon(x) \cap K_{x_0}$ konstruieren, sodass $x_0 \sim y \sim x$ und demnach $x \in K_{x_0}$. Dies widerspräche jedoch der Annahme $x \in X \setminus K_{x_0}$. Somit ist $X \setminus K_{x_0}$ zwingend offen und demnach K_{x_0} abgeschlossen.

(3) Ist X zusammenhängend, so gilt $K_{x_0} = X$, da $x_0 \in K_{x_0} \neq \varnothing$. Da K_{x_0} wegzusammenhängend ist, ist es auch X. Ist hingegen X wegzusammenhängend, so gilt nach Lemma 10.33, dass es auch zusammenhängend ist.

□

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum X genau dann überdeckungskompakt ist, wenn X das folgende endliche Schnittaxiom (finite intersection axiom) erfüllt: Ist $\mathcal{A}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Schnitt $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} A = \varnothing$, so existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcap_{a \in \mathcal{A}'} A = \varnothing$. (Oder äquivalent ausgedrückt: Ist $\mathcal{A}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X, und ist der Schnitt von je endlich vielen davon nicht leer, so ist auch $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} A \neq \varnothing$. Diese Eigenschaft wird im Skript Schachtelungsprinzip genannt.)

Lösung. Wir definieren
$$\mathcal{U} := \{X \setminus A \,\|\, A \in \mathcal{A}\}$$
Dann gilt es wegen De Morgan
$$X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \varnothing$$
Damit ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Da X überdeckungskompakt ist, existert es eine endliche Teilmenge $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ so dass $\mathcal{U}'$ noch eine offene Überdeckung von X ist. Definiere
$$\mathcal{A}' := \{X \setminus U \,\|\, U \in \mathcal{U}'\}$$
Dann ist $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ endlich und
$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}'} A = X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U = X \setminus X = \varnothing$$
$\square$

Aufgabe 5. Sei $\alpha > 1$. Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz und dessen Beweis, um zu zeigen, dass die durch
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + \alpha}, \quad \text{für } n \geq 2,\ x_1 = 0$$
rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung. Wir betrachten die Funktion $f : x \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{x+\alpha} \in [0,1]$. Wir behaupten, dass f eine Lipschitz-Kontraktion ist: für $x < y \in [0,1]$ ist
$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x+\alpha} - \frac{1}{y+\alpha} \right| = \left| \frac{y-x}{(x+\alpha)(y+\alpha)} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2}|x-y|.$$
Da $1/\alpha^2 < 1$ ist f eine Lipschitz-Kontraktion und nach dem Banachschen Fixpunktsatz, wissen wir, dass f einen Fixpunkt $y_0 = f(y_0) = \frac{1}{y_0+\alpha}$ hat. Dann ist $y_0^2 + \alpha y_0 - 1 = 0$, oder äquivalent $y_0 = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 1}$.
Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{\alpha^2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{\alpha^{2n}}|x_2 - x_1|.$$
Ausserdem ist für $n > m \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \ldots + |x_{n-1} - x_n| \\
&\leq \frac{1}{\alpha^{2(m-1)}}|x_1 - x_2| + \frac{1}{\alpha^{2m}}|x_1 - x_2| + \ldots + \frac{1}{\alpha^{2(n-2)}}|x_1 - x_2| \\
&\leq \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2j}}|x_1 - x_2| \\
&= \frac{1}{\alpha^{2(m-1)}} \frac{1}{1 - 1/\alpha^2}|x_1 - x_2| < \epsilon
\end{aligned}$$
für m gross genug, da $\alpha > 1$. Daraus folgt, dass die Folge Cauchy ist, und da $[0,1]$ vollständig ist, konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen y_0. $\square$

Aufgabe 6. Sei X ein metrischer Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne auf Satz 10.53 zurückzugreifen.

(1) Ist X folgenkompakt, so besitzt X eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.
(2) Ist X überdeckungskompakt, so nimmt jede stetige, reellwertige Funktion ein Maximum und ein Minimum an.

Lösung.

(1) Angenommen es existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{O}$ von X die keine Lebesgue-Zahl hat, d.h. für jedes $r > 0$ existiert ein Punkt $x \in X$ so dass $B_r(x) \nsubseteq O$ für alle $O \in \mathcal{O}$. Für $r = 1/n$ betrachten wir eine Folge von Punkte x_n in X mit $B_{1/n}(x_n) \nsubseteq O$ für alle $O \in \mathcal{O}$. Da X folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_n$ mit Grenzwert $x \in X$. Da $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X ist, ist $x \in O_x$ für ein $O_x \in \mathcal{O}$. Da O_x offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_x$. Nun existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \epsilon/2$ und $d(x_n, x) < \epsilon/2$. Dann gilt für alle $y \in B_{1/n}(x_n)$ dass $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \epsilon$ und damit ist $B_{1/n}(x_n) \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq O_x$, ein Widerspruch.

Angenommen X ist nicht total beschränkt, das heisst existiert ein $\epsilon > 0$ so dass für jede Menge endlich vieler Punkt $x_1, \dots, x_n \in X$ die Vereinigung $\bigcup_{j=1}^n B_\epsilon(x)$ echt in X enthalten ist. Sei $x_1 \in X$ beliebig. Dann ist $X \setminus B_\epsilon(x_1) \neq \varnothing$, und wir wählen $x_2 \in X \setminus B_\epsilon(x_1)$ beliebig. Nach Annahme ist auch $X \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)) \neq \varnothing$, und wir wählen $x_3 \in X \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$. Auf diese Weise definieren wir iterativ eine Folge $(x_n)_n$. Da X folgenkompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x \in X$. Das bedeutet, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_{n_k} \in B_{\epsilon/2}(x)$ für alle $n_k \geq N$. Aber dies widerspricht der Annahme, dass $x_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^n B_\epsilon(x_j)$ nach Konstruktion der Folge.

(2) Wir zeigen zunächst, dass falls $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen und X überdeckungskompakt ist, so ist $f(X)$ überdeckungskompakt. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Dann ist $\{f^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X überdeckungskompakt ist, existieren $f^{-1}(O_1), \dots, f^{-1}(O_n)$ mit $X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(O_j)$. Aber damit ist auch $f(X) = \bigcup_{j=1}^n (O_j)$ und wir haben eine endliche Teilüberdeckung gefunden.

Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Da f stetig ist und X kompakt gilt, dass $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist. Nach Heine-Borel ist $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt. Seien $M := \limsup\{f(x) \mid x \in X\}$ und $m := \liminf\{f(x) \mid x \in X\}$. Das heisst es existieren Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ in X mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = M$ und $\lim_{n \longrightarrow \infty} f(y_n) = m$. Da $f(X)$ abgeschlossen ist, folgt dass $M, m \in f(X)$, das heisst f nimmt ein Maximum und Minimum an.

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume gelten im Allgemeinen?

		W
(a)	Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.	
(b)	Jede Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.	
(c)	Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig.	X
(d)	Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen	X

(2) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	X
(f)	Abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	
(g)	Beliebige Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	
(h)	Abzählbare Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.	X