Lösungen zur Übungsserie 3

Aufgabe 1. In dieser Übung möchten wir zeigen, dass für gewisse stetige, bijektive Funktion auch deren Inverse stetig ist.

(1) Wir beginnen mit einem Gegenbeispiel zur allgemeinen Aussage. Finden Sie metrische Räume X, Y und eine bijektive, stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.
(2) Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv und stetig. Zeigen Sie, dass f^{-1} stetig ist, falls X kompakt ist.

Lösung.

(1) Wir betrachten die metrischen Räume $X = (0, 1]$ und $Y = S^1$ (der Einheitskreis) mit den Standardmetriken, die wir durch Einschränkungen der Metriken auf $\mathbb{R}$ beziehungsweise erhalten. Die Abbildung $f(0, 1] \longrightarrow S^1$, $x \longmapsto e^{2\pi ix}$ ist stetig und bijektiv, jedoch ist f^{-1} nicht stetig (bei $1 \in S^1$).
(2) Wir zeigen, dass das Urbild jeder abgeschlossenen Menge A in X unter f^{-1} abgeschlossen ist. Nun ist aber das Urbild von A unter f^{-1} gerade $f(A)$. Da A abgeschlossen und X nach Annahme kompakt ist, folgt, dass A kompakt ist. Wir haben bereits gesehen, dass Bilder von kompakten Mengen unter stetigen Abbildungen kompakt sind (Satz 10.59), woraus folgt, dass $f(A)$ kompakt ist. Nach Lemma 10.47 ist damit $f(A)$ abgeschlossen, was zu zeigen war.

□

Aufgabe 2. (Alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent). Sei $d \geq 1$ und seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$. Wir möchten in folgenden Schritten zeigen, dass $\|\cdot\|$,und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind.

(1) Erklären Sie, wieso Sie annehmen können, dass $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$die Einsnorm ist.
(2) Finden Sie eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\| \leq C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Schliessen Sie daraus auch, dass $\|\cdot\|\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich der euklidischen Metrik d_2 stetige Abbildung ist.
(3) Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum annimmt.
(4) Verwenden Sie (c) um eine Konstante $C' > 0$ mit $C'\|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ zu finden und schliessen Sie damit auf die zu beweisende Aussage.

Lösung.

(1) Wir haben bereits gesehen, dass Normäquivalenz eine Äquivalenzrelation bildet – siehe Serie 2, Aufgabe 1. Die Transitivität impliziert, dass wir annehmen können, dass $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$.

(2) Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und schreibe $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$. Setze $C := \max\{\|e_i\| : i = 1, \ldots, d\}$. Dann ist $\|x\| \leq \sum_i \|x_i e_i\| \leq C \sum_i |x_i| = C\|x\|_1$.

(3) Aus (b) folgt, dass $\|\cdot\|$ stetig ist. Da A kompakt ist, folgt, dass die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum annimmt.

(4) Sei $C' := \min\{\|x\| : x \in A\}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, dass $\frac{x}{\|x\|_1} \in A$, und damit

$$C' \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}.$$

Dies ist äquivalent zu $C'\|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

$\square$

Aufgabe 3. (Summen- und Produktregel) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Funktionen. Angenommen f_1 und f_2 sind differenzierbar bei $x_0 \in U$.

(1) Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 + f_2) = \mathrm{D}_{x_0} f_1 + \mathrm{D}_{x_0} f_2$$

erfüllt.

(2) Sei jetzt $m = 1$. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 f_2) = f_2(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_1 + f_1(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_2$$

erfüllt.

(3) Verallgemeinern Sie (b) auf das Skalarprodukt $\langle f_1, f_2 \rangle$, wobei $m \geq 1$ wieder beliebig ist.

Lösung.

(1) Wir haben

$$\begin{aligned}
&\|(f_1 + f_2)(x_0 + h) - (f_1 + f_2)(x_0) - D_{x_0} f_1(h) - D_{x_0} f_2(h)\| \\
&\quad \leq \|f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) - D_{x_0} f_1(h)\| + \|f_2(x_0 + h) - f_2(x_0) - D_{x_0} f_2(h)\|,
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|(f_1 + f_2)(x_0 + h) - (f_1 + f_2)(x_0) - D_{x_0} f_1(h) - D_{x_0} f_2(h)\|}{\|h\|} \\
&\leq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|(f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) - D_{x_0} f_1(h)\|}{\|h\|} \\
&\qquad + \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|(f_2(x_0 + h) - f_2(x_0) - D_{x_0} f_2(h)\|}{\|h\|} = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $f_1 + f_2$ bei x_0 differenzierbar und $\mathrm{D}_{x_0}(f_1 + f_2) = \mathrm{D}_{x_0} f_1 + \mathrm{D}_{x_0} f_2$.

(2) Wir haben

$$\begin{aligned}(f_1f_2)(x_0+h) &= f_1(x_0+h)f_2(x_0+h)\\ &= (f_1(x_0)+\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)+o(\|h\|))(f_2(x_0)+\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)+o(\|h\|))\\ &= f_1(x_0)f_2(x_0)+f_2(x_0)\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)+f_1(x_0)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)\\ &\quad+\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)+o(\|h\|).\end{aligned}$$

Wenn wir zeigen, dass

$$\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)=o(\|h\|)$$

dann haben wir die Produktregel gezeigt. Da das Differential linear ist erhalten wir

$$\frac{\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)}{\|h\|}=\mathrm{D}_{x_0}f_1\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h).$$

Da das Differential stetig ist, gilt

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)=\mathrm{D}_{x_0}f_2(0)=0,$$

und, da $\frac{h}{\|h\|}\in S^1$ kompakt ist, ist $\mathrm{D}_{x_0}f_1\left(\frac{h}{\|h\|}\right)$ als stetige Abbildung beschränkt. Damit folgt, dass

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\mathrm{D}_{x_0}f_1\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)=0,$$

was zu zeigen war.

(3) Wir haben

$$\begin{aligned}\langle f_1,f_2\rangle(x_0+h) &= \langle f_1(x_0+h),f_2(x_0+h)\rangle\\ &= \langle f_1(x_0)+\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)+o(\|h\|),f_2(x_0)+\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)+o(\|h\|)\rangle\\ &= \langle f_1(x_0),f_2(x_0)\rangle+\langle f_2(x_0),\mathrm{D}_{x_0}f_1(h)\rangle+\langle f_1(x_0),\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)\rangle\\ &\quad+\langle \mathrm{D}_{x_0}f_1(h),\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)\rangle+o(\|h\|).\end{aligned}$$

Nach dem gleichen Argument wie in (b) folgt, dass

$$\langle \mathrm{D}_{x_0}f_1(h),\mathrm{D}_{x_0}f_2(h)\rangle=o(\|h\|),$$

da das Skalarprodukt stetig ist. Damit erhalten wir, dass

$$\mathrm{D}_{x_0}\langle f_1,f_2\rangle=\langle f_2(x_0),\mathrm{D}_{x_0}f_1\rangle+\langle f_1(x_0),\mathrm{D}_{x_0}f_2\rangle.$$

□

Aufgabe 4. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{falls } (x,y)=(0,0),\\ (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{andernfalls.}\end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.
(2) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f nicht überall stetig sind.

Lösung.

(1) Die Funktion f ist ausserhalb von $(0,0)$ als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Wir berechnen die partiellen Ableitungen in $(0,0)$

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0,$$

da Sinus beschränkt ist. Analog erhalten wir $\partial_y f(0,0) = 0$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\lim_{(h_1,h_2) \longrightarrow (0,0)} \frac{\| f((0,0) + (h_1,h_2)) - f(0,0) \|}{\|h\|} \\ &\qquad = \lim_{(h_1,h_2) \longrightarrow (0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin\left(\frac{1}{h_1^2 + h_2^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

da Sinus beschränkt ist. Dies zeigt, dass f in $(0,0)$ differenzierbar mit Differential die Nullabbildung ist.

(2) Wir berechnen die partiellen Ableitungen für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2x) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right). \end{aligned}$$

Aus (a) wissen wir, dass $\partial_x f(0,0) = 0$. Mit $x = y \longrightarrow 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0} \partial_x f(x,x) &= \lim_{x \longrightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right), \end{aligned}$$

und dieser Limes existiert nicht. In der Tat erhalten wir für die Folge $x_n = \sqrt{1/(4\pi n)}$, dass

$$-\frac{1}{x_n}\cos\left(\frac{1}{2x_n^2}\right) = -\sqrt{4\pi n}\cos(2\pi n) = -\sqrt{4\pi n} \longrightarrow -\infty$$

für $n \longrightarrow \infty$.

Da f in x und y symmetrisch ist erhalten wir die analoge Aussage auch für ∂_y.

□

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.
(2) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Lösung.

(1) Sei $(v,w)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Wir berechnen

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f((0,0)+h(v,w))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^3v^2w}{h^2(v^2+w^2)h}=\frac{v^2w}{v^2+w^2},$$

und damit existieren alle Richtungsableitungen.

(2) Aus (a) erhalten wir für die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0,0)=0$ und $\partial_y f(0,0)=0$. Falls f in $(0,0)$ differenzierbar wäre, dann wäre $\mathrm{D}_{(0,0)}f=0$, die Nullmatrix, siehe Proposition 11.6. Wir berechnen

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{\|f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-D_{(0,0)}f(h)\|}{\|h\|}$$
$$=\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Mit $h=h_1=h_2$ haben wir

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^3}{(2h^2)\sqrt{2h^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0,$$

und damit ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

$\square$

Aufgabe 6. Lesen Sie Definition 10.65 und Proposition 10.66 im Skript, und beweisen Sie diese Proposition, indem Sie den in der Vorlesung gegebenen Beweis von Proposition 10.64 imitieren (vgl. Übung 10.67 im Skript).

Lösung. Sei $\varepsilon>0$. Dann für alle $x\in X$ existiert ein $\rho(x)>0$ so dass

$$f(B_{\rho(x)}(x))\subset B_{\frac{\varepsilon+\eta}{2}}(f(x))$$

Betrachte die offene Überdeckung $\{B_{\rho(x)}(x)\,\|\,x\in X\}$ von X. Dann hat diese eine Lebesgue Zahl $\delta>0$, d.h. für alle $x_0\in X$ gibt es ein $x\in X$ so dass

$$B_\delta(x_0)\subseteq B_{\rho(x)}(x)$$

Dann gilt

$$f(B_\delta(x))\subseteq f(B_{\rho(x)}(x))\subseteq B_{\frac{\varepsilon+\eta}{2}}(f(x))\subseteq B_{\varepsilon+\eta}(f(x_0))$$

$\square$

Aufgabe 7. Sei $d\geq 1$. Die folgenden Matrix-Gruppen werden als Teilräume von $\mathbb{C}^{d\times d}$ bzw. $\mathbb{R}^{d\times d}$ (jeweils mit der Standardtopologie) aufgefasst.

(1) Zeigen Sie, dass $GL_d(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend und somit auch zusammenhängend ist. Verifizieren Sie auch, dass $GL_d(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist.

(2) Zeigen Sie, dass $SO(d):=\{A\in SL_d(\mathbb{R})\,\|\,A^TA=\mathrm{id}\}$ kompakt und zusammenhängend ist.

Lösung. Bemerke zuerst, dass

$$\det\colon M_{d\times d}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist, da ein Polynom in der Einträge einer Matrix ist.

(1) Sei $A \in GL_d(\mathbb{C})$. Das Komplement einer endlichen Teilmenge ist wegzusammenhaengend. Insbesondere ist das Komplement der Nulstellenmenge von einem Polynom in wegzusammenhangend. Es folgt, dass ein weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ so dass $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$ existiert, so dass $A(t) := A + \gamma(t)(I_d - A)$ ganz in $GL_d(\mathbb{C})$ enthalten ist (d.h. $\det(A(t)) \neq 0$ für alle t). Da $A(t)$ ein Weg von A bis zu I ist, sind wir fertig.
Wir zeigen, dass $GL_d(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist. Es gilt $\det(GL_d(\mathbb{R})) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, welches nicht zusammenhängend ist. Somit kann $GL_d(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend sein.

(2) Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $d = 1$ ist dies trivial. Sei $d \geq 2$ und $T \in SO(d)$. Wir konstruieren ein weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow SO(d)$ so dass $\gamma(0) = T$ und $\gamma(1) = id$.
Sei $(e_1, \ldots, e_d)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^d$ und $(v_1, \ldots, v_d) := (Te_1, \ldots, Te_d)$. Da T orthonormal ist, ist (v_i) eine Orthonormalbasis (ONB) von $\mathbb{R}^d$. Wir wählen ein 2-dim Unterraum $W \subset \mathbb{R}^d$ so dass

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(e_1, v_1) \subset W$$

(bemerke, dass falls e_1 und v_1 linear unabhänig sind, dann ist $W = \operatorname{span}(e_1, v_1)$). Dann ist $\mathbb{R}^d = W \oplus W^\perp$. Sei $v_1' \in \mathbb{R}^d$ so dass (v_1, v_1') eine ONB von W ist. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ so dass

$$e_1 = av_1 + bv_1' \text{ und } a^2 + b^2 = 1$$

da $||e_1|| = 1$. Somit gibt es ein $\theta \in [0, 2\pi)$ so dass

$$(a,b) = (\cos(\theta), \sin(\theta)$$

Sei für $t \in [0,1]$

$$R(t) : W \longrightarrow W$$

gegeben durch

$$xv_1 + xv_1' \longrightarrow (\cos(t\theta)x - \sin(t\theta)y)v_1 + (\sin(t\theta)x + \cos(t\theta)y)v_1'$$

i.e. Drehung um $t\theta$. Dann ist $R(1)(v_1) = e_1$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$A(t) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

wie folgt: $A(t)(v) = v$, falls $v \in W^\perp$ und $A(t)(v) = R(t)(v)$ falls $v \in W$. Dann ist $\det(A(t)) = 1$. Wir definieren ein Weg $\alpha : [0,1] \longrightarrow SO(d)$ via $\alpha(t) = A(t)T$. Dann ist $\alpha(0) = T$ und $A(1)$ ist eine Matrix, die e_1 fixiert, da

$$\alpha(1)(e_1) = A(1)T(e_1) = A(1)(v_1) = e_1$$

.

Wir konstruieren ein Weg von $A(1)$ bis id. Es gilt $\mathbb{R}^n = \mathrm{R}e_1 \oplus (\mathbb{R}e_1)^\perp$. Dann $A(1) = id_{\mathbb{R}e_1} \oplus A'$, wo $A' \in SO(d-1)$, da $\det(A(1)) = \det(A')$. Dann existiert per induktion ein Weg β von A' bis id in $SO(d-1)$. Dann ist $id \oplus \beta$ ein weg von $A(1)$ bis id. Wir definieren γ durch Verkettung von α und $id \oplus \beta$.

$\square$

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(a)	Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.	X
(b)	Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, dann ist f in x_0 stetig.	
(c)	Ist f auf ganz U differenzierbar, dann existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig.	
(d)	Ist f auf ganz U differenzierbar, dann existieren alle partiellen Ableitungen von f in x_0.	X
(e)	Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig.	

(2) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst diskret, falls es für jeden Punkt $x_0 \in A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

		W
(f)	Jede diskrete Teilmenge von X ist endlich.	
(g)	Jede abgeschlossene diskrete Teilmenge von X ist endlich.	X
(h)	Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.	X
(i)	Jede gleichmässig stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.	