Lösungen zur Übungsserie 4

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, also die Abbildung

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix proportional zu einer orthogonalen Matrix ist. Was ist die geometrische Deutung?

Lösung. Wir berechnen für $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x+h\|^2}(x+h) &= \frac{1}{\langle x+h, x+h\rangle}(x+h) \\
&= \frac{1}{\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2}(x+h) \\
&= \frac{1}{\|x\|^2(1 + 2\langle x, h\rangle/\|x\|^2 + \|h\|^2/\|x\|^2)}(x+h) \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o(\|h\|)\right)(x+h) \\
&= \frac{1}{\|x\|^2}x - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x + \frac{1}{\|x\|^2}h + o(\|h\|),
\end{aligned}$$

und damit ist die Funktion differenzierbar mit Ableitung

$$\mathrm{D}_x f(h) = -\frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}x + \frac{1}{\|x\|^2}h.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle \|x\|^2 D_x f(h), \|x\|^2 D_x f(h)\rangle &= \left\langle h - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}x, h - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}x \right\rangle \\
&= \|h\|^2 - 4\frac{\langle x, h\rangle^2}{\|x\|^2} + 4\frac{\langle x, h\rangle^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 \\
&= \|h\|^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\|x\|^2 D_x f$ orthogonal ist, und damit ist $D_x f$ proportional zu einer orthogonalen Matrix. $\square$

Aufgabe 2. (1) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := xyz + 3e^x y$ im Punkt $(0, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$ zu $\alpha \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt und wenn ja, ob ein lokales Minimum oder Maximum angenommen wird.

(3) Bestimmen Sie die Taylor-Approximation 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung.

(1) Wir wissen, dass die Richtung des steilsten Anstiegs durch den Gradienten von f gegeben ist. Wir berechnen also die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(x,y,z) = yz + 3e^x y,\ \partial_y f(x,y,z) = xz + 3e^x,\ \partial_z f(x,y,z) = xy.$$

Und wir erhalten

$$\nabla f(x,y,z) = (yz + 3e^x y, xz + 3e^x, xy),$$

und damit im Punkt $(0,1,3)$

$$\nabla f(0,1,3) = (6,3,0).$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist damit

$$v = \frac{1}{\|(6,3,0)\|}(6,3,0) = \frac{1}{\sqrt{45}}(6,3,0).$$

(2) Wir berechnen die partiellen Ableitungen, um $\mathrm{D}_{(x_0,y_0)}f$ zu bestimmen:

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 3\alpha y,\ \partial_y f(x,y) = -3y^2 + 3\alpha x.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0)}f = \begin{pmatrix} 3x_0^2 + 3\alpha y_0 & -3y_0^2 + 3\alpha x_0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathrm{D}_{(x_0,y_0)}f = 0$, falls

$$3x_0^2 + 3\alpha y_0 = 0,\ -3y_0^2 + 3\alpha x_0 = 0.$$

Wir erhalten $x_0 = \frac{1}{\alpha}y_0^2$ und $x_0^2 = \frac{1}{\alpha^2}y_0^4 = -\alpha y_0$, woraus folgt $y_0 = 0$ (und damit $x_0 = 0$) oder $y_0 = -\alpha$ (und damit $x_0 = \alpha$).

Die Hessematrix von f bei $(0,0)$ ist gegeben durch

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha \\ 3\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

und damit ist $H_{(0,0)}$ indefinit, falls $\alpha \neq 0$, und damit nimmt f kein Extremum an.

Die Hessematrix von f bei $(\alpha,-\alpha)$ ist gegeben durch

$$H_{(\alpha,-\alpha)} = \begin{pmatrix} 6\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle: Ist $\alpha = 0$, so ist $H_{(\alpha,-\alpha)}$ degeneriert. Ist $\alpha > 0$ so ist $H_{(\alpha,-\alpha)}$ positiv definit, und damit hat f bei $(\alpha,-\alpha)$ ein Minimum. Ist $\alpha < 0$, dann ist $H_{(\alpha,-\alpha)}$ negativ definit, und damit hat f bei $(\alpha,-\alpha)$ ein Maximum.

(3) Wir erinnern uns, dass

$$\partial_{(h_1,h_2)} f = h_1 \partial_x f + h_2 \partial_y f,$$

und damit ist

$$\partial^2_{(h_1,h_2)} f = \partial_{(h_1,h_2)}(h_1 \partial_x f + h_2 \partial_y f) = h_1^2 \partial_x^2 f + 2h_1 h_2 \partial_{xy} f + h_2^2 \partial_y^2 f.$$

Wir berechnen

$$\partial_x f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2},\ \partial_x^2 f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}.$$

und

$$\partial_y f(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2},\ \partial_y^2 f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

Für die gemischte Ableitung erhalten wir

$$\partial_{xy} f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f((1,1)+(h_1,h_2)) &= f(1,1) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k!}(\partial^k_{(h_1,h_2)} f)(x) + R^f_{(1,1),2}(h_1,h_2) \\
&= (h_1 \partial_x f + h_2 \partial_y f)(1,1) + \frac{1}{2}(h_1^2 \partial_x^2 f + 2h_1 h_2 \partial_{xy} f + h_2^2 \partial_y^2 f)(1,1) + R^f_{(1,1),2}(h_1,h_2) \\
&= \frac{h_1}{2} + \frac{-h_2}{2} + \frac{-h_1^2}{4} + \frac{h_2^2}{4} + R^f_{(1,1),2}(h_1,h_2) \\
&= \frac{2h_1 - h_1^2 - 2h_2 + h_2^2}{4} + R^f_{(1,1),2}(h_1,h_2).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Seien $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, für den

$$f(x) = \|x - y_1\|^2 + \cdots + \|x - y_k\|^2$$

minimal wird und bestimmen Sie diesen Punkt.

Lösung. Wir erhalten für die partiellen Ableitungen von f

$$\partial_{x_j} f(x) = 2\sum_{i=1}^{k} (x_j - (y_i)_j).$$

Damit x ein kritischer Punkt ist, muss $\partial_{x_j} f(x) = 0$ für alle j, und damit $x_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k (y_i)_j$. Wir berechnen direkt, dass

$$\partial_{x_l}\partial_{x_j} f(x) = 2k\delta_{lj},$$

und damit ist H diagonal mit Einträgen $2k$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten, dass H positiv definit ist, und damit ist am kritischen Punkt ein Minimum, und der Punkt, der das Minimum definiert ist eindeutig durch die Gleichheit $x_j = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k (y_i)_j$ bestimmt. □

Aufgabe 4. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f)$ auf zwei Arten:

(1) indem Sie zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnen;
(2) unter Verwendung der Kettenregel.

Lösung.

(1) Wir berechnen die Komposition $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$g \circ f(x,y) = g(x\cos(y), x\sin(y), x^2) = \big(2 - x^2\sin(y)^2, x\sin(y), x^2\big)$$

Das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)}(g\circ f)$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, also durch eine 3×2-Matrix gegeben mit Spalten die partiellen Ableitungen von $g \circ f$. Wir erhalten also

$$\mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} -2x\sin(y)^2 & -2x^2\sin(y)\cos(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Wir berechnen zuerst

$$\mathrm{D}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \\ 2x & 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathrm{D}_{(x,y,z)}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kettenregel sagt uns nun, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f) &= \mathrm{D}_{f(x,y)}(g)\mathrm{D}_{(x,y)}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2x\sin(y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(y) & -x\sin(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2x\sin(y)^2 & -2x^2\sin(y)\cos(y) \\ \sin(y) & x\cos(y) \\ 2x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5. (**Zweite Version 20.03**) Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist, falls alle partielle Ableitungen bis zu und mit der zweiten Ordnung existieren (siehe Amann und Escher, Analysis II). Natürlich gilt, dass falls f zweimal stetig differenzierbar ist, dann ist f zweimal partiell differenzierbar. In der folgenden Übung zeigen wir, dass zweimal partiell differenzierbare Funktionen im Allgemeinen den Satz von Schwarz

nicht erfüllen.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert für alle für $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, und dass $\partial_{xy}f(0,0) = -\partial_{yx}f(0,0) = 1$.

Beachte: Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbat ist, falls ∇f differenzierbar ist. Tatsächlich gilt der Satz von Schwarz auch für zweimal differenzierbare Funktionen (im Widerspruch zur vorherigen Version dieser ¨Ubung).

Lösung. Wir bemerken zuerst, dass f stetig ist. Dies ist klar an allen Punkten $\neq (0,0)$, da f als rationale Funktion gegeben ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| &= |xy|\frac{|x^2-y^2|}{|x^2+y^2|} \\ &\leq |xy|\frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} \\ &< \tfrac{1}{2}\|(x,y)\|^2 \end{aligned}$$

Und damit folgt, dass für jedes $\epsilon > 0$ und für $\|(x,y)\| < \delta := \sqrt{2\epsilon}$

$$\left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| < \epsilon$$

gilt, und damit ist f bei $(0,0)$ stetig.
Nach Satz 11.10 und Proposition 11.6 ist f genau dann stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wir berechnen die partiellen Ableitungen von f ausserhalb von $(0,0)$:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ausserdem erhalten wir für die partiellen Ableitungen in $(0,0)$:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} h \cdot 0\frac{h^2 - 0}{h^2 + 0} = 0.$$

Analog erhalten wir $\partial_y f(0,0) = 0$. Wir bemerken, dass $\partial_x f$ und $\partial_y f$ stetig sind mit $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| &= |y|\frac{|(x^2-y^2)^2 + 2x^2y^2|}{\|(x,y)\|^4} \\ &\leq \|(x,y)\|\frac{\|(x,y)\|^4 + \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)|^4} = 2\|(x,y)\|, \end{aligned}$$

und analog für ∂_y.

Wir zeigen jetzt, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f existieren. Dies ist klar ausserhalb von $(0,0)$. Bei $(0,0)$ erhalten wir für die partiellen Ableitungen von $\partial_y f$

$$\partial_x \partial_y f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1,$$

und

$$\partial_y \partial_y f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\partial_y f(0,h) - \partial_y f(0,0)}{h} = 0.$$

Bei $(0,0)$ erhalten wir für die partiellen Ableitungen von $\partial_x f$

$$\partial_x \partial_x f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\partial_x f(h,0) - \partial_x f(0,0)}{h} = 0,$$

und

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1.$$

$\square$

Aufgabe 6. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen, betrachtet als Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto A^{-1}$$

stetig ist.

(3) Zeigen Sie, dass inv differenzierbar ist und bestimmen Sie für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ das Differential $D_A\,\mathrm{inv}$.

Lösung.

(1) Die Determinante

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist (wie aus der linearen Algebra bekannt) eine polynomiale Funktion der Matrixeinträge, also stetig. Ausserdem ist eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$. Also ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ offen in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$.

(2) Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist die inverse Matrix gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A),$$

wobei $\operatorname{Adj}(A)$ die Adjunkte von A bezeichnet. Diese hat als Einträge (bis auf Vorzeichen) Determinanten von Untermatrizen von A. Die Einträge von A^{-1} sind also rationale Funktionen der Einträge von A, und damit ist $A \longmapsto A^{-1}$ stetig.

(3) Wir bemerken zunächst, dass der Definitionsbereich von inv gemäss (1) offen ist, sodass der Untersuchung der Differenzierbarkeit nichts im Wege steht. Da in (2) schon festgestellt wurde, dass die Einträge von A^{-1} durch rationale Funktionen gegeben sind, existieren alle partiellen Ableitungen von inv und diese sind stetig. Mit Satz 11.10 folgt die Differenzierbarkeit von inv. Für die Bestimmung der Ableitung $D_A\,\mathrm{inv}$

reicht es, für jedes $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ den Wert von $D_A \operatorname{inv}(B)$ anzugeben. Nach Proposition 11.6 stimmt dieser mit der Ableitung $\partial_B \operatorname{inv}(A)$ entlang B überein. Letztere ist per Definition die Ableitung von $s \longmapsto (A+sB)^{-1}$ in $s = 0$.[1] Um diese zu bestimmen leiten wir die Identität

$$\mathbf{1}_n = (A + sB)^{-1}(A + sB)$$

unter Verwendung der Produktregel (siehe unten) nach s ab. Wir erhalten

$$\mathbf{0}_n = \left(\frac{D}{Ds}(A + sB)^{-1}\right)(A + sB) + (A + sB)^{-1}B,$$

also nach Auswerten in $s = 0$ und Umstellen nach dem gesuchten Term

$$D_A \operatorname{inv}(B) = \partial_B \operatorname{inv}(A) = \left.\frac{D}{Ds}\right|_{s=0} (A + sB)^{-1} = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Produktregel für matrixwertige Funktionen: Ist $U \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, offene Teilmenge und sind $A, B \colon U \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ differenzierbare Funktionen, so ist das Produkt $AB \colon U \ni s \longmapsto A(s)B(s)$ differenzierbar mit

$$(AB)'(s) = A'(s)B(s) + A(s)B'(s)$$

für jedes $s \in U$.

Der Beweis ist eins zu eins derselbe wie für die übliche Produktregel in Proposition 7.5. Zur Begründung der dort durchgeführten Schritte ist dabei nur die Stetigkeit der Matrixmultiplikation zu verwenden.

□

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Die Hesse-Matrix $H(x_0)$ der Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in einem kritischen Punkt x_0 von f positiv semidefinit, d.h. es gelte $\langle v, H(x_0)v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise?

		W
(a)	x_0 ist ein striktes lokales Minimum von f.	
(b)	x_0 ist ein (möglicherweise nicht striktes) lokales Minimum von f.	
(c)	x_0 ist kein lokales Maximum von f.	
(d)	Keine der obige Aussagen.	X

(2) Welche der folgenden Aussagen ¨uber regul ¨are und kritische Werte bzw. Punkte gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Jeder Punkt im Urbild eines regulären Wertes ist ein regulärer Punkt.	X
(f)	Das Bild eines kritischen Punktes ist ein kritischer Wert.	X
(g)	Jeder Punkt im Urbild eines kritischen Wertes ist ein kritischer Punkt.	
(h)	Das Bild eines regulären Punktes ist ein regulärer Wert.	

[1] Man bemerke, dass diese Funktion aufgrund der Offenheit von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ in einer Umgebung von 0 definiert ist.