Lösungen zur Übungsserie 5

Aufgabe 1. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Man zeige:

(1) (Schlaufencharakterisierung) f ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral von f entlang jeder stückweise stetig differenzierbaren Schlaufe verschwindet.

(2) Ist F ein Potential von f, so ist eine weitere Funktion $\tilde{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$ genau dann ein Potential von f, falls eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{F} = F + c$ existiert.

Lösung.

(1) Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Schlaufe, das heisst $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sei $\eta : [a, b] \longrightarrow U$ der konstante Weg mit $\eta(t) = \gamma(a)$ für alle $t \in [a, b]$. Da f konservativ ist, gilt

$$\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}x\rangle = \int_\eta \langle f, \mathrm{d}x\rangle = \int_a^b \langle f(\eta(t)), 0\rangle \,\mathrm{d}t = 0,$$

und damit verschwindet das Wegintegral von f entlang γ.

Seien $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ und $\eta : [a', b'] \longrightarrow U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Wege mit $\gamma(a) = \eta(a')$ und $\gamma(b) = \eta(b')$. W ir können annehmen, dass $b = a'$. Dann ist

$$L : [a, b'] \longrightarrow U,\ t \longmapsto \begin{cases} \gamma(t), & \text{falls } t \in [a, b] \\ \eta(b' + a' - t), & \text{falls } t \in [a', b'] \end{cases}$$

eine stückweise stetig differenzierbare Schlaufe. Nach Annahme, gilt dass

$$0 = \int_L \langle f, \mathrm{d}x\rangle = \int_\gamma \langle f, \mathrm{d}x\rangle - \int_\eta \langle f, \mathrm{d}x\rangle,$$

und somit ist f konservativ.

(2) Sei F ein Potential von f, dass heisst $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit $f(x) = \nabla F(x)$ für alle $x \in U$.

Angenommen $\tilde{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$ ist ein Potential von f. Wir müssen zeigen, dass eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\tilde{F} = F + c$. Wir erhalten wie im Beweis von Satz 11.49, dass

$$\int_\gamma \langle f, \mathrm{d}x\rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \tilde{F}(\gamma(b)) - \tilde{F}(\gamma(a))$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$. Da U zusammenhängend ist, erhalten wir

$$F(x) - F(x_0) = \tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0)$$

für alle $x \in U$ und $x_0 \in U$ fix. Daraus folgt

$$\tilde{F}(x) = F(x) + (\tilde{F}(x_0) - F(x_0))$$

für alle $x \in U$, und damit $\tilde{F} = F + (\tilde{F}(x_0) - F(x_0))$.

Angenommen es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{F} = F + c$. Dann folgt direkt, dass $\nabla \tilde{F}(x) = \nabla F(x) = f(x)$, und damit ist $\tilde{F}$ ein Potential von f.

$\square$

Aufgabe 2. Für welchen Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda x e^y \\ (y+1+x^2)e^y \end{pmatrix}$$

für $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$ konservativ? Bestimmen Sie für diesen Wert ein Potential von f.

Lösung. Da f auf einem sternförmigen Gebiet definiert ist und stetig differenzierbar ist, ist f genau dann konservativ, wenn $\partial_x f_y = \partial_y f_x$. Wir erhalten

$$\partial_x f_y = 2xe^y,\ \partial_y f_x = \lambda x e^y,$$

woraus folgt, dass f für $\lambda = 2$ konservativ ist.
Wie im Beweis von 11.49 setzen wir als Ansatz für das Potential F von f

$$F : (x,y) \longmapsto \int_{\gamma_{(x,y)}} \langle f, \mathrm{d}x \rangle$$

für einen Weg $\gamma_{(x,y)}$ von $(0,0)$ nach (x,y). Wir wählen den geraden Weg $\gamma_{(x,y)}(t) = (tx, ty)$ und erhalten

$$\begin{aligned} F : (x,y) \longmapsto \int_{\gamma_{(x,y)}} \langle f, \mathrm{d}x \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2txe^{ty} \\ (ty+1+t^2x^2)e^{ty} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (2x^2t + y^2t + y + yt^2x^2)e^{ty} dt \\ &= e^y(x^2+y) \end{aligned}$$

mit Hilfe von partieller Integration. $\square$

Aufgabe 3. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zum ersten Mal zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

(1) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X,d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f : X \longrightarrow X$ ohne Fixpunkt;

(2) ein vollständiger metrischer Raum (X,d) und eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

Lösung.

(1) Setze $X = (0, \infty)$ mit der euklidischen Metrik und $f\colon X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x/2$. Dies ist eine (wohldefinierte) Lipschitz-Kontraktion auf X, die keinen Fixpunkt besitzt. (Der eindeutig bestimmte Fixpunkt in $\mathbb{R}$, der nach dem Banachschen Fixpunktsatz existieren muss, ist $0 \notin X$.)

(2) Sei $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Es gilt also $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass aus dem Mittelwertsatz (Theorem 8.29) folgt, dass die Bedingung in der Aufgabenstellung erfüllt ist. Wegen $f(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f auch keinen Fixpunkt.

□

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}u$ und $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

Lösung. Wir schreiben das gegebene Gleichungssystem als $F(x, y, z, u, v) = 0$ für die Funktion $F\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} xy^5 + yu^5 + zv^5 - 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v - 1 \end{pmatrix}.$$

Gemäss dem Satz über implizite Funktionen (Satz 12.1) müssen wir dann überprüfen, dass die Teilmatrix des Differentials $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)}F$ bestehend aus den partiellen Ableitungen nach u und v invertierbar ist. Wegen

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)}F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist diese Bedingung erfüllt. (In der Tat, die fragliche Teilmatrix ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Determinante $5 \neq 0$.) Nach Satz 12.2 gilt also

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 5. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0,0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

Lösung. Wir bemerken zuerst, dass der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar ist, da

$$\frac{d}{dx}\bigg|_{(x,y)=(0,0)} (x^3 - y^2(1-x)) = 0$$

gilt. Dies besagt aber nicht, dass die gegebene Gleichung nahe $(0,0)$ nicht nach x auflösbar ist. Dies ist hier nämlich der Fall: Für (x,y) in der Umgebung $(-\infty,1)\times\mathbb{R}$ von $(0,0)$ ist die Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ äquivalent zu

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}. \tag{1}$$

Wir untersuchen nun die Funktion

$$f\colon (-\infty,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^3}{1-x}$$

auf der rechten Seite von (1). Sie hat als Ableitung

$$f'(x) = \frac{(3-2x)x^2}{(1-x)^2},$$

sodass für $x \in (-\infty,1)$ stets $f'(x) \geq 0$ gilt, mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$. Zusammen mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Korollar 8.4) impliziert dies, dass f auf $(-\infty,1)$ streng monoton wachsend ist. Wegen $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \infty$ ist $f\colon (-\infty,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ also bijektiv. Wir können auf (1) also die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty,1)$ anwenden. Dies ergibt, dass (1) äquivalent ist zu

$$x = f^{-1}(y^2).$$

Damit haben wir die gegebene Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach x aufgelöst. $\square$

Aufgabe 6. Es bezeichne $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Matrixnorm (siehe Definition 10.62).

(1) Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(I_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_n$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge konvergiert (unter den getroffenen Annahmen).

(2) Zeigen Sie, dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.

Lösung.

(1) Wir zeigen zunächst, dass die Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ konvergiert. Eine Folge von Matrizen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ konvergiert genau dann, wenn $(A_n e_i)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $i = 1,\dots,m$ konvergiert. Da $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ vollständig ist genügt es zu zeigen, dass $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j e_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Cauchy-Folge ist für alle $i = 1,\dots,m$.

Sei hierzu $i \in \{1,\dots,m\}$ und $0 < k \leq n$. Dann gilt

$$\left\|\sum_{j=0}^{n} B^j e_i - \sum_{j=0}^{k} B^j e_i\right\| = \left\|\sum_{j=k+1}^{n} B^j e_i\right\| \leq \sum_{j=k+1}^{n} \|B^j e_i\| \leq \sum_{j=k+1}^{n} \|B\|_{\mathrm{op}}^j$$

$$= \|B\|_{\mathrm{op}}^{k+1} \sum_{j=0}^{n-k-1} \|B\|_{\mathrm{op}}^j \leq \|B\|_{\mathrm{op}}^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \|B\|_{\mathrm{op}}^j = \|B\|_{\mathrm{op}}^{k+1} \cdot \frac{1}{1 - \|B\|_{\mathrm{op}}} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

wobei wir verwendet haben, dass $\|Bv\| \leq \|B\|_{\mathrm{op}}\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt. Somit ist $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j e_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Tat eine Cauchy-Folge und die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ konvergiert.

Weiter gilt

$$(1_m - B) \cdot \sum_{j=0}^{n} B^j = \sum_{j=0}^{n} B^j - \sum_{j=1}^{n+1} B^j = 1_m - B^{n+1}.$$

Da $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$, haben wir $\|B^{n+1}\|_{\mathrm{op}} \leq \|B\|_{\mathrm{op}}^{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. Lässt man in obiger Gleichung als n gegen unendliche gehen, so erhält man

$$(1_m - B) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} B^j = 1_m.$$

Daher gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} B^j = (1_m - B)^{-1}$$

wie gewünscht.

(2) Wir behaupten nun, dass für jedes $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ und jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ auch $C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ ist. Insbesondere zeigt dies, dass für jedes $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ der offene Ball mit Radius $\|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ ist, sodass $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ in der Tat eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ ist.

Sei also $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ und $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B - C\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$. Wir schreiben $C = B - (B - C) = B(1 - (1 - B^{-1}C))$, sodass C invertierbar ist, wenn $1 - (1 - B^{-1}C)$ invertierbar ist. Nach Voraussetzung gilt

$$\|1 - B^{-1}C\|_{\mathrm{op}} = \|B^{-1}(B - C)\|_{\mathrm{op}} \leq \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B - C\|_{\mathrm{op}} < 1,$$

sodass $1 - (1 - B^{-1}C)$ invertierbar ist, wie wir zuvor gezeigt haben. Daher ist auch C invertierbar.

$\square$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(a)	Ist U konvex, so ist U sternförmig.	X
(b)	Ist U sternförmig, so ist U konvex.	
(c)	Ist U sternförmig, so ist U wegzusammenhängend.	X
(d)	Ist U wegzusammenhängend, so ist U sternförmig.	

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Bedingung, dass die Jacobi-Matrix von f drei Paare übereinstimmender Elemente hat, ist

		W
(e)	hinreichend, aber nicht notwendig,	
(f)	notwendig, aber nicht hinreichend,	X
(g)	notwendig und hinreichend,	
(h)	weder notwendig noch hinreichend,	

damit f konservativ ist.

Gegenbeispiel. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f(x, y, z) = (x, y + z, z)$.