Lösungen zur Übungsserie 6

Aufgabe 1. Verwenden Sie den Satz über lokale Invertierbarkeit (Satz 12.5), um den Satz über implizite Funktionen (Satz 12.2) zu beweisen.

Lösung. Ist F wie in Satz 12.2 gegeben, so setzen wir

$$G : B_r(x_0) \times B_r(y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, (x, y) \longmapsto (x, F(x, y))$$

Dann ist G d-mal stetig differenzierbar, da F es ist, und hat damit nach Satz 12.5 eine offene Umgebung $U_0 \subseteq B_r(x_0) \times B_r(y_0)$ und $V_0 \subseteq G(U_0)$ mit $G_{|U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ ist bijektiv mit d-mal differenzierbarer Umkehrabbildung. Das Differential bei $(x, F(x, y)) \in V_0$ ist nach Satz 12.5 gegeben durch

$$\mathrm{D}_{(x,F(x,y))}(G^{-1}) = (\mathrm{D}_{(x,y)}G)^{-1}.$$

Andererseits gilt

$$\mathrm{D}_{(x,y)}G = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ \partial_x F(x, y) & \partial_y F(x, y) \end{pmatrix}$$

und damit

$$(\mathrm{D}_{(x,y)}G)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ -(\partial_y F(x, y))^{-1}\partial_x F(x, y) & (\partial_y F(x, y))^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass $f : x \longmapsto (x, 0) \longmapsto G^{-1}(x, 0) = (x, y) \longmapsto y$ eine Lösungsfunktion von F ist. Nach der Kettenregel gilt damit

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_x f &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ -(\partial_y F(x, y))^{-1}\partial_x F(x, y) & (\partial_y F(x, y))^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -(\partial_y F(x, y))^{-1}\partial_x F(x, y), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Aufgabe 2. (Umkehrabbildung zu Kugelkoordinaten) Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$(r, \theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

wie in Abschnitt 12.1.4. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von f.

Lösung. Es gilt $r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Da $z = r\cos\theta$ folgt

$$\theta = \theta(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Ausserdem haben wir

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

und damit ist

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta},\ \sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta}.$$

Wir erhalten $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x}$, und damit

$$\varphi = \varphi(x,y,z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

□

Aufgabe 3. (Elliptische Kurven) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + a\}$. Für welche a ist M_a eine Teilmannigfaltigkeit?

Lösung. Wir möchten Theorem 12.16. verwenden, denn es gilt $M_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ mit $F(x,y) = y^2 - x^3 - a$. Dann ist F glatt, und der einzige kritische Punkt von F ist $(0,0)$, da $\partial_x F(x,y) = -3x^2$ und $\partial_y F(x,y) = 2y$. Ist $a \neq 0$, dann ist $(0,0) \notin M_a$ und damit ist M_a eine Teilmannigfaltigkeit.
Ist $a = 0$, so ist M_a keine Teilmannigfaltigkeit: Angenommen M_0 ist eine Teilmannigfaltigkeit. Da M_0 weder diskret noch offen in $\mathbb{R}^2$ ist, kann M_0 höchstens 1-dimensional sein (siehe Übung 12.15). Das heisst M_0 ist lokal der Graph einer differenzierbaren Funktion $y = \phi(x)$ oder $x = \psi(y)$. Damit erhalten wir $y = \phi(x) = \sqrt{x^3}$ oder $x = \psi(y) = \sqrt[3]{y^2}$. In einer Umgebung von 0 ist die Funktion ϕ für $x < 0$ nicht definiert. Das heisst es könnte höchstens die Funktion ψ sein, die jedoch bei 0 nicht differenzierbar ist. □

Aufgabe 4. (Quadratische Hyperflächen) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, so dass die assoziierte quadratische Form $Q_A : x \longmapsto x^t A x$ nicht-degeneriert ist. Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ definiert.

Lösung. Wir möchten wieder Theorem 12.16. verwenden. Wir definieren die Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto Q_A(x) - 1$. Dann ist F glatt und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\} = F^{-1}(0)$. Ist 0 ein regulärer Wert, so ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.
Wir haben

$$x^t A x = \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Wir berechnen damit die partiellen Ableitungen

$$\partial_k F(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i = 2(Ax)_k.$$

Angenommen alle partiellen Ableitungen am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wären gleich 0, dann ist $x = 0$, da die quadratische Form nicht-degeneriert ist, und somit A invertierbar. Nun gilt aber $Q_A(0) = 0$ und damit ist $0 \notin \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\}$, woraus folgt, dass 0 ein regulärer Wert von F ist, was zu zeigen war. □

Aufgabe 5. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $U \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Des Weiteren sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, also eine glatte Abbildung, deren Differential $\mathrm{D}_x f$ in jedem Punkt $x \in U$ injektiv ist.

(1) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x existiert, so dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.
(2) Sei f nun zusätzlich injektiv. Ist dann auch ganz $f(U)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Lösung.

(1) Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Proposition 12.12. Sei $x_0 \in U$. Nach Annahme hat das Differential $\mathrm{D}_{x_0} f$ Rang k. Nach einer Koordinatenpermutation können wir also annehmen, dass die ersten k Zeilen von $\mathrm{D}_{x_0} f$ linear unabhängig sind. Wir betrachten nun die Funktionen

$$g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$$

und

$$h\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k},\ x \longmapsto (f_{k+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Dann ist das Differential von g im Punkt x_0 nach Konstruktion invertierbar. Nach dem Umkehrsatz (Satz 12.5) existiert also eine Umgebung $V \subset U$ von x_0, so dass $g\colon V \longrightarrow g(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $f(V)$ genau der Graph der glatten Funktion $h \circ (g|_V)^{-1}\colon g(V) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$. In der Tat, $g(V)$ besteht genau aus den Punkten der Form $(f_1(x), \dots, f_k(x))$ für $x \in V$ und nach Konstruktion gilt für solche x

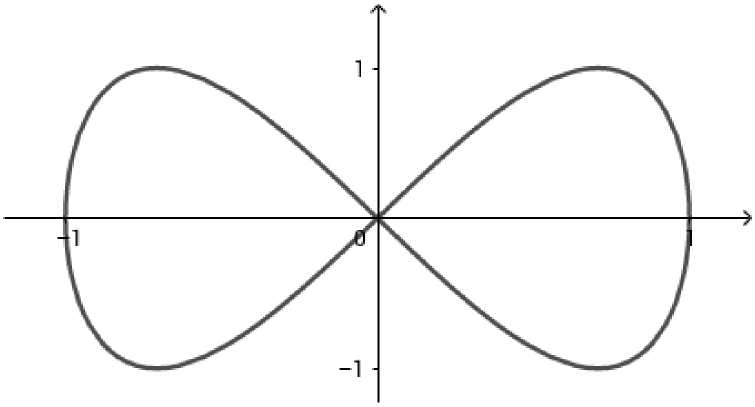
$$h \circ (g|_V)^{-1}(f_1(x), \dots, f_k(x)) = h(x) = (f_{k+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Proposition 12.12 zeigt also, dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

(2) Der glatte Weg

$$\tilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert eine liegende Acht.



Seine Ableitung

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

verschwindet für kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{\gamma}$ eine Immersion ist. Wir definieren nun $I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ und betrachten die Einschränkung $\gamma := \tilde{\gamma}|_I$. Dieses Intervall ist genau so gewählt, dass das Bild $\gamma(I)$ noch immer die gesamte liegende Acht ist, γ aber injektiv ist.[1] Somit erfüllt γ alle Voraussetzungen in der Aufgabenstellung. Allerdings ist das Bild $\gamma(I)$ keine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. In der Tat, da im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \gamma(\pi/2)$ eine Selbstüberschneidung vorliegt, kann $\gamma(I)$ in keiner Umgebung von $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ als Graph einer Funktion dargestellt werden, im Widerspruch zu Proposition 12.12.[2]

$\square$

Aufgabe 6. (1) Zeigen Sie die folgende Umkehrung von Satz 12.16: Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $0 < k < n$, so gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ regulärer Wert von F ist und $U \cap M = F^{-1}\{0\}$ gilt.

(2) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ und zwei glatte Funktionen $F_1, F_2\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert sowohl von F_1 als auch von F_2. Finden Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Schnitt $N = M_1 \cap M_2$ der beiden $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten (Hyperflächen) $M_1 = F_1^{-1}\{0\}$ und $M_2 = F_2^{-1}\{0\}$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung.

(1) Sei M ein k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, das heisst für jeden Punkt $p \in M$ gibt es nach Proposition 12.12 eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^n$, eine

[1] Anschaulich ist dies klar; formal verifiziert wird es mit Methoden der Analysis I. Man teile I z.B. auf in vier gleich lange Teilintervalle I_j, $j = 1, 2, 3, 4$, und stelle fest, dass die Bilder $\gamma(I_j)$ in unterschiedlichen Quadranten liegen. Eingeschränkt auf eines der Teilintervalle I_j wird die Injektivität durch das Monotonieverhalten der ersten Komponente von γ garantiert.

[2] Rigoros gemacht wird dies z.B. durch die Feststellung, dass

$$\lim_{t \searrow -\pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \nearrow \pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \searrow \pi/2} \gamma(t) = \lim_{t \nearrow 3\pi/2} \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei die Annäherung in jedem dieser vier Fälle im Inneren eines anderen Quadranten stattfindet.

glatte Funktion $f_p : \tilde{U}_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}_p$ von $\mathbb{R}^k$ und $\sigma \in S_n$, so dass $M \cap U_p = P_\sigma(\tilde{U}_p, f_p(\tilde{U}_p))$. Wir können annehmen, dass $\sigma = \mathrm{Id}$, und damit

$$M \cap U_p = \mathrm{Graph}(f_p).$$

Wir behaupten, dass $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ ein regulärer Wert von

$$F_p : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k},\ (x, y) \longmapsto y - f_p(x)$$

ist und $M \cap U_p = F_p^{-1}(0)$. Es ist klar, dass

$$F_p^{-1}(0) = \{(x, y) \in U_p \mid y - f_p(x) = 0\} = \mathrm{Graph}(f_p).$$

Wir berechnen

$$\mathrm{D}_{(x_0,y_0)} F_p = \begin{pmatrix} -\partial_x f_p(x_0, y_0) & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix},$$

und dies hat vollen Rang für alle (x_0, y_0), woraus folgt, dass 0 ein regulärer Wert ist.

(2) Wir betrachten die Funktion $F = (F_1, F_2)U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (F_1(x), F_2(x))$. Dann ist $F^{-1} \setminus \{(0, 0)\} = N$, und wir wollen eine Bedingung damit $(0, 0)$ ein regulärer Wert von F ist. Wir bemerken, dass $D_p F(x) = (\nabla_p F_1(x), \nabla_p F_2(x))^t$ für alle $p \in N$, und dies hat vollen Rang genau, dann wenn die Gradienten von F_1 und F_2 überall auf N linear unabhängig sind.

□

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Seien $F \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ eine glatte Funktion, $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla F(x) \neq 0$ und $N := \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = F(x)\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

		W
(a)	N ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.	☐
(b)	Es gibt eine offene Umgebung $U\mathbb{R}^n$ von x, sodass $N \cap U$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.	X
(c)	$\nabla F(x)$ steht senkrecht auf $\ker(D_x F)$.	X
(d)	Ist $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_N$ in $x \in N$ ein lokales Extremum annimmt, so ist $\nabla f(x) = \nabla F(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.	X

(2) Welche der folgenden Aussagen über Teilmannigfaltigkeiten gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Die Vereinigung zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	☐
(f)	Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M. Dann ist N selbst eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.	X
(g)	Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.	X
(h)	Der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	☐

(3) Sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein <u>regulärer</u> glatter Weg, der zusätzlich $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Anders ausgedrückt ist γ also eine reguläre glatte Schlaufe, bei der sich Anfang und Ende auf glatte Weise zusammenfügen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(i)	Für jedes $t \in (0,1)$ existiert ein offenes Teilintervall $J \subset (0,1)$ mit $t \in J$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.	X
(j)	Es existiert eine Teilmenge $J \subset [0,1]$ der Form $J = [0,a) \cup (b,1]$ für gewisse $a, b \in (0,1)$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.	X
(k)	Das Bild $\gamma([0,1])$ ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	
(l)	Ist γ zusätzlich <u>einfach</u> (vgl. Abschnitt 9.7.2), so ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	X