Lösungen zur Übungsserie 7

Aufgabe 1. Gegeben sei die Schar der Ellipsoide

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = c,\ c > 0.$$

Welches dieser Ellipsoide berührt die Ebene $4x + 3y + 3z = 28$ tangential, und in welchem Punkt?

Lösung. Wir stellen zunächst fest, dass die Ellipsoidenschar genau den (nichttrivialen) Niveauflächen der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ entspricht. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Gradient von f in (x_0, y_0, z_0) senkrecht auf der Niveaufläche von f steht, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) geht. Somit berührt eines der Ellipsoide die Ebene genau dann im Punkt (x_0, y_0, z_0) tangential, wenn der Gradient von f in (x_0, y_0, z_0) parallell zum Normalenvektor der Ebene E ist; in Formeln

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \stackrel{!}{=} \vec{n}_E \iff \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 6y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Auflösen ergibt

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(2\lambda, \tfrac{\lambda}{2}, \tfrac{3\lambda}{2}\right)$$

und da dieser Punkt in der Ebene liegen muss, ergibt sich

$$28 \stackrel{!}{=} 4x_0 + 3y_0 + 3z_0 = 8\lambda + \tfrac{3\lambda}{2} + \tfrac{9\lambda}{2} = 14\lambda \iff \lambda = 2.$$

Zusammengefasst erhalten wir also $(x_0, y_0, z_0) = (4, 1, 3)$ und da dieser Punkt auch im Ellipsoiden liegen muss, können wir einsetzen und es ergibt sich

$$c = x_0^2 + 3y_0^2 + z_0^2 = 16 + 3 + 9 = 28.$$

Das gesuchte Ellipsoid ist somit $x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$. $\square$

Aufgabe 2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf. . .

(a) . . . dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(b) . . . der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung.

(a) Wir verwenden Lagrange-Multiplikatoren. Dazu beobachten wir zunächst, dass $\mathbb{S}^1 = g^{-1}(0)$, wobei $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ gegeben ist. Daher ist eine Lagrange-Funktion $L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ für unser Problem durch

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

gegeben. Nach Korollar 12.28 müssen bei einem lokalen Extremum $p = (x,y) \in g^{-1}(0)$ die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$0 = \partial_x L(x,y,\lambda) = 2x(2-\lambda) - 1, \tag{1}$$

$$0 = \partial_y L(x,y,\lambda) = y(2-2\lambda), \tag{2}$$

$$0 = \partial_\lambda L(x,y,\lambda) = -(x^2+y^2-1). \tag{3}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach Gleichung (2):

(i) Falls $y = 0$: Dann gilt $x^2 = 1$ nach 3, d.h. $x = \pm 1$. Damit gibt es lokale Extrema bei $(1,0)$ und $(-1,0)$ mit den Funktionswerten $f(1,0) = 1$ und $f(-1,0) = 2$.

(ii) Falls $\lambda = 1$: Dann gilt $x = \frac{1}{2}$ nach 1. Einsetzen in 3 liefert $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit gibt es weitere lokale Extrema bei $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ mit Funktionswerten $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4}$.

Vergleicht man die Funktionswerte an allen lokalen Extrema, so sieht man, dass die Funktion f auf $\mathbb{S}^1$ ein globales Maximum bei $(-1,0)$ besitzt, sowie zwei globale Minima bei $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ und $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) Da wir in (a) bereits den Rand $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$ untersucht haben, müssen wir nur noch das Innere auf Extrema prüfen. Hierzu berechnen wir

$$Df(x,y) = (4x-1, 2y).$$

An einem lokalen Extremum $p = (x,y)$ von f muss gelten

$$0 = Df(x,y) = (4x-1, 2y),$$

d.h. $p = (x,y) = (\frac{1}{4}, 0)$. Offenbar liegt p im Inneren der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Man berechnet die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

welche positiv-definit ist, sodass bei p ein lokales Minimum vorliegt.

Der Funktionswert von f bei p ist $f(p) = f(\frac{1}{4}, 0) = -\frac{1}{8}$. Vergleicht man diesen Funktionswert mit denen aus Teil (a), so sieht man, dass f auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ein globales Minimum bei $(\frac{1}{4}, 0)$ hat, sowie ein globales Maximum bei $(-1,0)$.

□

Aufgabe 3. Betrachte die Funktion $f\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x - y + 2z$ und die Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

(1) Bestimmen Sie die Extrema von f auf M.
(2) Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum von M bei alle Extrema von f auf M.

Lösung.

(1) Die zu f und M gehörige Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 3x - y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \lambda_2(x + y).$$

Nach Korollar 12.28 müssen wieder bei einem lokalen Extremum $(x, y, z) \in M$ die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
\partial_x L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= 3 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0\\
\partial_y L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= -1 - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0\\
\partial_z L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= 2 - 2\lambda_1 z = 0\\
\partial_{\lambda_1} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\\
\partial_{\lambda_2} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= -(x + y) = 0
\end{aligned}$$

Aus $-x - y = 0$ folgt $y = -x$, und damit $z^2 = 1 - 2x^2 \implies z = \pm\sqrt{1 - 2x^2}$. Aus $2 - 2\lambda_1 z = 0$ folgt $\lambda_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-2x^2}}$. Ausserdem haben wir

$$3 - 2\lambda_1 x = -1 + 2\lambda_1 x \implies 1 = \lambda_1 x.$$

Also $z = x = -y$ und damit $x^2 = 1 - 2x^2 \iff 3x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Durch Einsetzen in f ergibt sich

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\right) = \tfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, \quad f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\right) = -\tfrac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}.$$

Somit haben wir alle Extrema von f auf M gefunden, und f nimmt bei $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ ein Maximum und bei $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ ein Minimum an.

(2) Sei $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Wir schreiben

$$S^2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + 1\right\}$$

Natürlich ist $\{p\}$ eine Basis von $(T_p S^2)^\perp$. Damit kann $T_p S^2$ mit der Ebene

$$x - y + z = \sqrt{3}$$

identifiziert werden. Dann kann $T_p M$ mit der Linie

$$p + t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

da $(-1, 1, 2)$ der Vektorprodukt von $(1, -1, 0)$ mit $(1, 1, 0)$ ist.

$\square$

Aufgabe 4. Wir führen die folgende Definition ein (Def. 13.26 im Skript).

Definition *Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die charakteristische Funktion von B auf Q Riemann-integrierbar ist. Das Volumen von B ist in diesem Fall durch*

$$\mathrm{vol}(B) := \int_Q \mathbb{1}_B \, d\mathrm{vol}$$

definiert.

Bemerkung: nach Korollar 13.27 im Skript ist $\mathrm{vol}(B)$ von der Wahl von Q unabhängig.

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die Teilmenge $a + B$ Jordan-messbar ist mit Volumen

$$\mathrm{vol}(a + B) = \mathrm{vol}(B)$$

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge. Zeigen Sie: Ist K keine Nullmenge, so enthält die Differenzmenge $K - K = \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$ eine Umgebung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^n$.

Lösung.

(1) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossene Quader so dass $B \subseteq Q$ und $\mathbb{1}_B$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Dann ist $a + Q$ ein abgeschlossene Quader so dass $a + B \subseteq a + Q$ und $\mathbb{1}_{a+B}$ auf $a + Q$ Riemann-integrierbar ist, da

(2) Da K Jordan-messbar ist, es folgt, dass ∂K eine Jordan-Nullmenge ist. Es folgt, dass K nicht-leeren Inneren hat. Damit es existiert ein $x \in K$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq K$. Dann ist $B_r(x) - x \subseteq K - K$.

$\square$

Aufgabe 5. (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sich Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent auch mittels abgeschlossener Quader definieren lassen; also dass eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_l$ abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$N \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \epsilon.$$

(2) Folgern Sie, dass die Cantormenge $C \subseteq \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.82 im Skript) eine Nullmenge ist.

Lösung.

(1) Sei N eine Nullmenge, und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge $(Q_l)_l$ offener Quader im $\mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \epsilon.$$

Dann gilt auch

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \overline{Q_l} \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(\overline{Q}_l) < \epsilon,$$

wobei $\overline{Q}_l$ den Abschluss des offenen Quaders Q_l bezeichnet. Dann sind die Quader $\overline{Q}_l$ abgeschlossen und $\mathrm{vol}(\overline{Q}_l) = \mathrm{vol}(Q_l)$ (siehe Definition 13.1).

Andererseits, sei nun $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_l$ abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \epsilon.$$

Wir wollen zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Sei $(Q_l)_l$ eine Folge abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann ist jeder abgeschlossene Quader Q_l enthalten in einem offenen Quader Q'_l mit $\mathrm{vol}(Q'_l) \leq 2\,\mathrm{vol}(Q_l)$, genauer ist $Q_l = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, dann können wir $Q'_l = (a_1 - x, b_1 + x) \times \ldots \times (a_n - x, b_n + x)$ für ein $x > 0$ klein genug betrachten. Damit ist

$$N \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q'_l) \leq 2\,\mathrm{vol}(Q_l) < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

und somit N eine Nullmenge.

(2) Die Cantor-Menge ist der Durchschnitt $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ mit $C_0 = [0, 1]$ und $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wissen, dass $\mathrm{vol}(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, da C_n Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen $I_1, \ldots, I_{2^n}$ (also abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}$) der Länge $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ist. Da $C \subseteq C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir $n' \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\left(\frac{2}{3}\right)^{n'} < \varepsilon$. Dann ist

$$C \subset C_{n'} = \bigcup_{l=1}^{2^{n'}} I_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{2^{n'}} \mathrm{vol}(I_l) = \mathrm{vol}(C_{n'}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n'} < \epsilon,$$

und damit ist C eine Nullmenge.

□

Aufgabe 6. Konstruieren Sie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, für welche der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

Lösung. Sei $0 < \epsilon < 1/2$ und $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Wir definieren $I_n := (q_n - \epsilon 2^{-n}, q_n + \epsilon 2^{-n})$ und

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Nach Konstruktion gilt dann $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ und das „Gesamtvolumen“[1] ist klein, in dem Sinn, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_n) = 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\epsilon. \tag{4}$$

[1] Wir schreiben dies stets in Anführungszeichen, da es genau der Punkt dieser Aufgabe ist, dass diese Menge U nicht Jordan-messbar ist.

Wir weisen nun nach, dass diese Menge U die Forderungen in der Aufgabenstellung erfüllt. Als Vereinigung von offenen Intervallen ist U sicherlich offen in $\mathbb{R}$. Als nächstes bemerken wir, dass aufgrund von $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset U$ das gesamte Intervall $[0,1]$ im Abschluss $\overline{U}$ von U enthalten ist. Unter Verwendung des Randes von U kann dies geschrieben werden als

$$\partial U \cup U = (\overline{U} \setminus U) \cup U = \overline{U} \supset [0,1].$$

Angesichts von (4) ist es daher naheliegend zu vermuten, dass für eine Überdeckung von ∂U durch offene Quader $(Q_l)_l$ in $\mathbb{R}$ (also durch Intervalle) notwendigerweise

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) \geq 1 - 2\epsilon \tag{5}$$

gelten muss. Zum Beweis dieser unteren Schranke bemerken wir als erstes, dass für eine solche Überdeckung des Randes

$$[0,1] \subset \partial U \cup U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l$$

eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0,1]$ ist. Endlich viele dieser Mengen reichen daher zur Überdeckung aus; es gibt also $N, L \in \mathbb{N}$ mit

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{N} I_n \cup \bigcup_{l=1}^{L} Q_l.$$

Sowohl die I_n als auch die Q_l sind hierbei offene Intervalle, deren Volumen sich als Differenz des rechten und des linken Endpunkts berechnet. Elementare Überlegungen[2] zeigen, dass daher für die Volumina gilt, dass

$$1 \leq \sum_{n=1}^{N} \operatorname{vol}(I_n) + \sum_{l=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_l).$$

Hieraus folgt unter Verwendung von (4) nun

$$\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) \geq \sum_{l=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_l) \geq 1 - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{vol}(I_n) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) = 1 - 2\epsilon,$$

also genau (5). Da ϵ so gewählt wurde, dass $1 - 2\epsilon > 0$ gilt, zeigt dies, dass ∂U keine Nullmenge sein kann. □

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Nullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge?

[2]Wird ein Intervall $[a,b]$ überdeckt von endlich vielen Intervallen $J_1, \dots, J_r$, geordnet aufsteigend nach den linken Endpunkten, so ist der rechte Endpunkt von J_k höchstens $a + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{vol}(J_j)$. Damit auch der rechte Endpunkt b in einem der Intervalle J_j liegen kann, muss also $\sum_{j=1}^{r} \operatorname{vol}(J_j) \geq b - a$ gelten.

W

(a) Falls f gleichmässig stetig ist. ☐

(b) Falls f gleichmässig stetig ist und $m \geq n$. ☐

(c) Falls f lokal Lipschitz-stetig (vgl. Definition 11.16) ist. ☐

(d) Falls f lokal Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$. X

(2) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen über die (Sub-) Niveaumengen $N_{\leq a} = \{x \in Q \mid f(x) \leq a\}$ und $N_{=a} = \{x \in Q \mid f(x) = a\}$ von f gelten im Allgemeinen?

W

(e) $N_{=a}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. ☐

(f) Ist $N_{=a}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar. X

(g) $N_{\leq a}$ ist für fast alle $a \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar. X

(h) Ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar, so ist auch $N_{=a}$ Jordan-messbar. ☐