Lösungen zur Übungsserie 8

Aufgabe 1. Sei Q ein abgeschlossener Quader und sei $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_Q f\mathrm{dvol} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall gilt.
Formulieren und beweisen Sie die analoge Aussage für Funktionen auf Jordan-messbaren Teilmengen.

Lösung. Wir behaupten, dass $f(x_0) = 0$ für $x_0 \in Q$ gelten muss, wenn f in x_0 stetig ist. Daraus folgt, dass $f = 0$ fast überall gilt (f Riemann-integrierbar impliziert, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist).
Angenommen $x_0 \in Q$ ist ein Stetigkeitspunkt von f, der $f(x_0) > 0$ erfüllt. Dann gibt es nach Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = \epsilon$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$. Nun kann man einen offenen Quader $Q_0 \subseteq B_\delta(x_0)$ mit $x_0 \in Q_0$ finden, woraus $f \geq \varepsilon \mathbb{1}_{Q_0}$ und somit

$$\int_Q f(x)\mathrm{dvol} \geq \epsilon \mathrm{vol}(Q_0) > 0,$$

was der Annahme $\int_Q f\mathrm{dvol} = 0$ widerspricht.
Sei B eine Jordan-messbare Menge und $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_B f\mathrm{dvol} = 0$. Wir wollen zeigen, dass dann $f = 0$ fast überall gilt. Die Jordan-Messbarkeit von B impliziert, dass es einen abschlossenen Quader gibt mit $B \subseteq Q$, und das Integral von f auf B ist definiert als

$$\int_B f\mathrm{dvol} = \int_Q \mathbb{1}_B f\mathrm{dvol},$$

wobei $\mathbb{1}_B f$ definiert ist als f, falls $x \in B$, und 0 für $x \in Q \setminus B$. Nun ist $\mathbb{1}_B f$ eine auf Q Riemann-integrierbare Funktion mit $\mathbb{1}_B f \geq 0$ und $\int_Q \mathbb{1}_B f\mathrm{dvol} = \int_B \ f\mathrm{dvol} = 0$. Nach dem ersten Teil ist $\mathbb{1}_B f = 0$ fast überall, woraus folgt, dass $f = 0$ fast überall. $\square$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx,$$

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\ dxdy,$$

Sei

$$f\colon [0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} e^{y-x}, & x > y \geq 0 \\ -e^{x-y}, & 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dxdy,$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ \ dydx,$$

Lösung.

- $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^y \sin(y^2)\ dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y\sin(y^2)\ dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)|_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$
- $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\ dxdy = \int_0^1 \int_{-x}^x (x+y)^2\ dydx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\ dx = \frac{2}{3}.$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dxdy &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{y-x}\ dx + \int_0^y -e^{x-y}\ dx\right)\ dy = \\ &= \int_0^\infty \left(1 - 1 + e^{-y}\right)\ dy = \int_0^\infty e^{-y}\ dy = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dydx &= \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{y-x}\ dx + \int_x^\infty -e^{x-y}\ dy\right)\ dx = \\ &= \int_0^\infty \left(1 - e^{-x} - 1\right)\ dx = \int_0^\infty -e^{-x}\ dx = -1\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Definition. *Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst eine Jordan-Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Liste $Q_1, \ldots, Q_L \subseteq \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass*

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{i=1}^L Q_i \ \textit{und}\ \sum_{i=1}^L vol(Q_i) < \varepsilon$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $\mathcal{J}$ ist eine Jordan-Nullmenge,
(2) $\mathcal{J}$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(\mathcal{J}) = 0$,
(3) $\overline{J}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

Lösung. (1) ⇒ (2). Nach Annahme ist $\mathcal{J}$ eine Jordan-Nullmenge. Wir fixieren eine endliche Überdeckung $Q_1, \ldots, Q_L$ von $\mathcal{J}$ wie in der obigen Definition, unter der Annahme, dass $Q_i \nsubseteq \mathcal{J}$ für alle i. Da Quader beschränkt sind, es existiert einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{J} \subseteq Q$. Wir zeigen, dass die charackteristische Funktion von $\mathcal{J}$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Für alle $i = 1, \ldots, L$ wir schreiben

$$Q \cap Q_i = \prod_{j=1}^{n_i} I_j^i$$

wobei jedes I_j^i ein Intervall ist. Wir definieren einen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q via die Endpunkte der Intervalle I_j^i's. Da $Q_i \nsubseteq \mathcal{J}$ es folgt, dass die Untersumme $U(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z})$ gleich 0 ist. Es gilt

$$O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) \leq \sum_{i=1}^{L} \operatorname{vol}(Q_i) < \epsilon$$

Damit ist $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}$ auf Q Riemann-integrierbar, und $\operatorname{vol}(\mathcal{J}) = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{J}$ nach Annahme Jordan-messbar ist, ist es beschränkt. Somit ist $\partial\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Wir zeigen, dass such $\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei Q ein abgeschlossener Quader so dass $\mathcal{J} \subseteq Q$ und $\mathbb{1}_{\mathcal{J}}$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Da nach Annahme $\operatorname{vol}(\mathcal{J}) = 0$ ist, es gibt eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q mit

$$O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

Nach Definition ist

$$O(\mathbb{1}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{vol}(Q_i)$$

wobei die Q_i's sind die Quader in $\mathfrak{Z}$ mit $Q_i \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$. Bemerke, dass $(Q_1, \ldots, Q_N)$ ist im Allgemeinen keine Überdeckung von $\mathcal{J}$, da die Q_i offene Quader sind. Allerdings, besteht $\mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i$ aus (im Allgemeinen unendlich viele) Quadern mit leerem Inneren, die Lebesgue-Nullmenge sind (13.18). Es folgt, dass weitere unendlich viele offene Quadern $(\tilde{Q}_j)_j$ existieren mit

$$\sum \operatorname{vol}(\tilde{Q}_j) < \varepsilon$$

Da

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcup Q_i \cup \bigcup \tilde{Q}_i$$

nach konstruction, es folgt, dass $\mathcal{J}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Dies zeigt, dass $\overline{\mathcal{J}}$ auch eine Lebesgue-Nullmenge ist.
(3) $\Rightarrow$ (1). Sei $\varepsilon > 0$ und wähle Quader $(Q_i)_i$ mit

$$\overline{\mathcal{J}} \subseteq \bigcup_i Q_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_i) < \varepsilon$$

Nach Heine-Borel ist $\overline{\mathcal{J}}$ kompakt, so es existieren $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_L$ aus der Familie $(Q_i)_i$ die $\overline{\mathcal{J}}$ überdecken. Insebesondere überdecken diese Quadern die Teilmenge $\mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}}$. Natürlich gilt

$$\sum_{i=1}^{L} \operatorname{vol}(\tilde{Q}_i) \leq \sum \operatorname{vol}(Q_i) < \varepsilon$$

Somit ist $\mathcal{J}$ eine Jordan-Nullmenge. $\square$

Aufgabe 4. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Volumen des von den Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $2z = x^2 + y^2$ eingeschlossenen Bereichs B.

Lösung. Sei $B := \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leq 8, x^2+y^2-2z \leq 0\}$ Wir berechnen

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B d\mathrm{vol}$$

Wir benutzten Zylinderkoordinaten. Es gilt mit Verwendung von $\rho = r^2$ (so dass $d\rho = 2rdr$):

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B r\ drdzd\phi = \frac{1}{2}\int_{\{\frac{1}{2}\rho<z<\sqrt{8-\rho}\}} d\rho dz d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{8-\rho} - \frac{1}{2}\rho\ d\rho d\phi = \frac{4}{3}(8\sqrt{2}-7)\pi$$

$\square$

Aufgabe 5. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\omega_n = \mathrm{vol}(B_1^{\mathbb{R}^n}(0))$ das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Hinweis: Finden Sie eine 2-Schritt-Rekursionsformel für ω_n.

Lösung. Wir wenden das Prinzip von Cavalieri (Korollar 12.46) auf den n-dimensionalen Einheitsball an. Für $t \in (-1,1)$ ist der dabei auftretende Schnitt ein $(n-1)$-dimensionaler Ball mit Radius $\sqrt{1-t^2}$, welcher nach Übung 12.31 das Volumen $(1-t^2)^{(n-1)/2}\omega_{n-1}$ besitzt. Folglich gilt

$$\omega_n = I_n \omega_{n-1} \tag{1}$$

für das Integral

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2}\, dt.$$

Durch die Substitution $t = \cos(u)$ erhalten wir $I_n = \int_0^\pi \sin^n(u)\, du$, also genau das Integral, das auch in der Herleitung der Wallisschen Produktformel in Abschnitt 8.7.1 des Skripts auftrat. Die dort bewiesenen Formeln zeigen

$$I_n I_{n-1} = \frac{1}{n} I_1 I_0 = \frac{2\pi}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zweimaliges Anwenden von (1) ergibt daher

$$\omega_n = I_n I_{n-1} \omega_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}$$

für $n \geq 3$. Für gerades n schliessen wir also wegen $\omega_2 = \pi$ auf

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{(2\pi)^{n/2-1}}{n(n-2)\cdots 4}\omega_2 \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots 2},\end{aligned}$$

was aufgrund der Formel $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (vgl. Gleichung (8.9) im Skript) und $\Gamma(1) = 1$ mit der zu zeigenden Formel übereinstimmt. Für ungerades n erhalten wir wegen $\omega_1 = 2$

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n(n-2)\cdots 3}\omega_1 \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}};\end{aligned}$$

und wiederum stimmt das Ergebnis aufgrund der Rekursionsformel für Γ und

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx \overset{(u=\sqrt{x})}{=} 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

mit der Formel auf dem Aufgabenblatt überein. (Siehe Beispiel 12.68 für die Herleitung des Wertes $\sqrt{\pi}$ für das letzte Integral.) $\square$

Aufgabe 6. (Volumen des Standardsimplex) Sei $n \in \mathbb{N}$. In dieser Übung möchten wir das Volumen des n-dimensionalen Simplex

$$\triangle_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } \sum_{k=1}^n x_k \leq 1\}$$

berechnen.

(1) Zeigen Sie, dass $\triangle_n$ das gleiche Volumen hat wie die Teilmenge

$$A_e = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq 1\}.$$

(2) Zu $\sigma \in S_n$ definieren wir

$$A_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq y_{\sigma(n)} \leq 1\}.$$

Verifizieren Sie, dass $\mathrm{vol}(A_\sigma) = \mathrm{vol}(A_e)$ gilt für alle $\sigma \in S_n$.

(3) Begründen Sie, wieso $[0,1]^n = \bigcup_{\sigma\in S_n} A_\sigma$ ist und verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das Volumen von $\triangle_n$ gleich $\frac{1}{n!}$ ist.

Lösung.

(1) Wir verwenden die lineare Substitution gegeben durch die Transformation

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}.$$

Diese wird beschrieben durch die $n \times n$-Matrix mit Einsen auf und unter der Diagonalen und Nullen über der Diagonalen, sodass $\det(L) = 1$ gilt, und L bildet $\triangle_n$ ab auf die Menge

$$A_e = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1\}.$$

Nach den obigen Ausführungen gilt unter Verwendung der linearen Substitutionsregel (Proposition 13.49)

$$\mathrm{vol}(\triangle_n) = \mathrm{vol}(A_e).$$

(2) Wir betrachten für $\sigma \in S_n$ die lineare Substitution

$$P_\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_{\sigma(1)} \\ y_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ y_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Diese wird beschrieben durch die $n \times n$-Permutationsmatrix mit Einsen an der Stelle (i,j) falls $\sigma(i) = j$ und Nullen sonst, sodass $\det(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$ gilt, und P_σ bildet A_e ab auf die Menge

$$A_\sigma = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le y_{\sigma(1)} \le \dots \le y_{\sigma(n)} \le 1\}.$$

Nach den obigen Ausführungen gilt wieder unter Verwendung der linearen Substitutionsregel (Proposition 13.49)

$$\operatorname{vol}(A_e) = \operatorname{vol}(A_\sigma).$$

(3) Es ist klar, dass $\bigcup_{\sigma \in S_n} A_\sigma \subseteq [0,1]^n$. Sei nun andererseits $y \in [0,1]^n$. Dann existiert eine Permutation $\sigma \in S_n$ so, dass

$$0 \le y_{\sigma(1)} \le \ldots \le y_{\sigma(n)} \le 1.$$

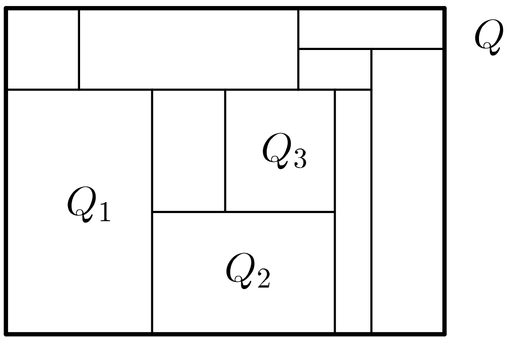
Damit ist $y \in A_\sigma$, und somit folgt $[0,1]^n \subseteq \bigcup_{\sigma \in S_n} A_\sigma$. Wir behaupten, dass $\operatorname{vol}([0,1]^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{vol}(A_\sigma)$. Wir bemerken, dass die Vereinigung nicht disjunkt ist. Angenommen $y \in A_e \cap A_\sigma$ für $e \neq \sigma \in S_n$. Sei j minimal mit $\sigma(j) \neq j$. Wir können annehmen, dass $j < \sigma(j)$. Dann folgt, dass $y_j = y_{j+1} = \ldots = y_{\sigma(j)}$, und daraus folgt, dass $A_e \cap A_\sigma$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Dies gilt für alle Schnitte der Mengen A_σ mit $\sigma \in S_n$, woraus die Behauptung folgt. Wir erhalten

$$1 = \operatorname{vol}([0,1]^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{vol}(A_\sigma) = n! \operatorname{vol}(A_e) = n! \operatorname{vol}(\triangle_n),$$

was zu zeigen war.

$\square$

Aufgabe 7. (Ganzzahlige Kantenlängen) Gegeben sei ein Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$, das eine endliche Überdeckung mit Rechtecken $Q_1, \dots, Q_n \subset Q$ besitzt, die sich jeweils höchstens an den Kanten schneiden.



Angenommen jedes der Rechtecke $Q_1, \ldots, Q_n$ hat mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge. Zeigen Sie, dass dann auch Q mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge hat.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Funktion auf Q, dessen Integral genau dann verschwindet, wenn Q eine ganzzahlige Kante hat.

Lösung. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$

Wir bemerken, dass $\int_a^b \sin(2\pi x)\, dx = 0$ genau dann, wenn $a \pm b$ eine ganze Zahl ist. Damit gilt für jedes Rechteck $T \in \mathbb{R}^2$ mit Kanten parallel zu den Achsen nach Fubinis Theorem $\int_T f(x, y)\mathrm{dvol} = 0$ genau, dann wenn eine der beiden Kantenlängen eine ganze Zahl ist. Nach Annahme, gilt für alle $Q_1, \ldots, Q_n$, dass $\int_{Q_i} f(x, y)\mathrm{dvol} = 0$, und wegen der Additivität des Integrals folgt, dass

$$\int_Q f(x, y)\mathrm{dvol} = \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_i} f(x, y)\mathrm{dvol} = 0,$$

woraus folgt, dass mindestens eine Kantenlänge von Q eine ganze Zahl ist. □

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ bezeichne $I = \int_B f\, d\,\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?

	W
(a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\, dx\, dy$.	
(b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$.	
(c) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$.	X
(d) $I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x, y) \in B : f(x, y) \geq t\})\, dt$.	X

(2) Welche der folgenden Mengen ist Jordan-messbar?

	W
(e) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.	
(f) $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.	
(g) $[0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \left[\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right]$.	X
(h) $\bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{k \geq m} \bigcup_{l=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2l-1}{2^k}, \frac{2l}{2^k}\right]$.	

(3) Welches der folgenden Integrale unterscheidet sich von den anderen?

	W
(i) $\int_{-1}^1 \int_{-1+\lvert x\rvert}^{1-\lvert x\rvert} dy\, dx$	
(j) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dy\, dx$.	X
(k) $4\int_0^1 \int_0^{1-x} dy\, dx$.	
(l) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\, dx$.	