Lösungen zur Übungsserie 9

Aufgabe 1. (1) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\Phi\colon \{(s,t) : s > 0,\, 0 < t < 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \longmapsto (as\cos(t), bs\sin(t))$$

in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$.

(2) Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment $J_0 = \int_B x^2 + y^2 \, d\operatorname{vol}(x,y)$ der Ellipse $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ mit Halbachsen $a, b > 0$.

Lösung.

(1) Die Jacobi-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} a\cos(t) & b\sin(t) \\ -as\sin(t) & bs\cos(t) \end{pmatrix}$$

Somit ist die Jacobi-Determinante gleich abs.

(2) Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(a^2 s^2 \cos^2(t) + b^2 s^2 \sin^2(t)\right) abs \, dt \, ds \\ &= \int_0^1 \pi ab \,(a^2 + b^2)\, s^3 \, ds = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. (Dreiecksungleichung für uneigentliche Integrale) Sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung einer Teilmenge B. Seien $f, g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f| \leq g$ gilt und die Funktionen $f|_{B_m}$ und $g|_{B_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar sind. Angenommen g ist uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch f und $|f|$ auf B uneigentlich Riemann-integrierbar sind und dass

$$\left| \int_B f \; d\operatorname{vol} \right| \leq \int_B |f| \; d\operatorname{vol} \leq \int_B g \; d\operatorname{vol}$$

gilt.

Lösung. Wir betrachten die nicht-negativen Funktionen

$$\begin{aligned} f_+ &: B \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \max\{f(x), 0\}, \\ f_- &: B \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \max\{-f(x), 0\} \end{aligned}$$

welche auf allen B_m für $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar sind, da f nach Voraussetzung auf allen B_m für $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist. Da $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$, sind f_+

und f_- durch g beschränkt und damit folgt aus Satz 13.74, dass f_+ und f_- uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Die Limite

$$\int_B f_+ \, d\,\mathrm{vol}, \int_B f_- \, d\,\mathrm{vol}$$

existieren also und sind unabhängig von der gewählten erschöpfenden Folge. Dies gilt dann wegen $\int_{B_m} f \, d\,\mathrm{vol} = \int_{B_m} f_+ \, d\,\mathrm{vol} - \int_{B_m} f_- \, d\,\mathrm{vol}$ und $\int_{B_m} |f| \, d\,\mathrm{vol} = \int_{B_m} f_+ \, d\,\mathrm{vol} + \int_{B_m} f_- \, d\,\mathrm{vol}$ auch für den Limes bezüglich f und $|f|$, woraus folgt, dass f und $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar sind.
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left|\int_B f \; d\,\mathrm{vol}\right| &= \left|\int_B f_+ - f_- \; d\,\mathrm{vol}\right| = \left|\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_+ \, d\,\mathrm{vol} - \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_- \; d\,\mathrm{vol}\right| \\
&\leq \left|\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_+ \, d\,\mathrm{vol}\right| + \left|\lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_- \; d\,\mathrm{vol}\right| \\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_+ \, d\,\mathrm{vol} + \lim_{m\longrightarrow\infty} \int_{B_m} f_- \; d\,\mathrm{vol} \\
&= \int_B f_+ + f_- \; d\,\mathrm{vol} = \int_B |f| \; d\,\mathrm{vol} \leq \int_B g \; d\,\mathrm{vol}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Es sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \cosh(x)\}$ und $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit $f_1(x, y) = 1$ und $f_2(x, y) = y \sinh(x)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n}\rangle \, dL$ von f durch den Rand ∂B von B auf zwei Arten:

(1) direkt anhand der Definition von Flussintegralen;
(2) unter Verwendung des Divergenzsatzes.

Lösung.

(1) Wir verwenden die Definition in Proposition 14.2 und berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} f \cdot d\mathbf{n} = &- \int_a^b f_2(x,c)\,dx + \int_c^{\varphi(b)} f_1(b,y)\,dy \\
&+ \int_a^b \left\langle f(x,\varphi(x)), \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx - \int_c^{\varphi(a)} f_1(a,y)\,dy \\
= &- \int_0^1 f_2(x,0)\,dx + \int_0^{\cosh(1)} f_1(1,y)\,dy \\
&+ \int_0^1 \left\langle f(x,\cosh(x)), \begin{pmatrix} -\sinh(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx - \int_0^{\cosh(0)} f_1(0,y)\,dy \\
= &\cosh(1) + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \cosh(x)\sinh(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sinh(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx - 1 \\
= &\cosh(1) - 1 + \int_0^1 -\sinh(x) + \cosh(x)\sinh(x)\,dx \\
= &\cosh(1) - 1 - (\cosh(1) - 1) + \frac{1}{2}(\cosh^2(1) - 1) \\
= &\frac{1}{2}(\cosh^2(1) - 1)
\end{aligned}$$

(2) Mithilfe des Divergenssatzes aus Proposition 14.2 erhalten wir

$$\int_{\partial B} f \cdot d\mathbf{n} = \int_B \operatorname{div}(f)\,d\operatorname{vol}$$

und wir berechnen

$$\operatorname{div}(f)(x,y) = \partial_1 f_1(x,y) + \partial_2 f_2(x,y) = \sinh(x).$$

Wir erhalten mit dem Satz von Fubini (Theorem 13.39)

$$\begin{aligned}
\int_B \operatorname{div}(f)\,d\operatorname{vol} &= \int_0^1 \int_0^{\cosh(x)} \sinh(x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \sinh(x)\cosh(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(\cosh^2(1) - 1).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\operatorname{div}(A \circ f \circ A^{-1})(x) = \operatorname{div}(f)(A^{-1}x).$$

Bemerkung: Die Divergenz eines differenzierbaren n-dimensionalen Vektorfelds $g = (g_1, \ldots, g_n)^t$ ist definiert als $\operatorname{div}(g) = \partial_1 g_1 + \cdots + \partial_n g_n$.

Lösung. Wir bemerken, dass

$$\operatorname{div}(g)(x) = \partial_1 g_1(x) + \cdots + \partial_n g_n(x) = \operatorname{tr}(\mathrm{D}_x g),$$

wobei $\mathrm{D}_x g$ die Jacobi-Matrix von g bei x ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A \circ f \circ A^{-1})(x) &= \operatorname{tr}(\mathrm{D}_x(A \circ f \circ A^{-1})) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{D}_{A^{-1}x}(A \circ f) \circ \mathrm{D}_x A^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{D}_{f(A^{-1}x)} A \circ \mathrm{D}_{A^{-1}x} f \circ \mathrm{D}_x A^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(A \circ \mathrm{D}_{A^{-1}x} f \circ A^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(A \circ A^{-1} \circ \mathrm{D}_{A^{-1}x} f) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{D}_{A^{-1}x} f) = \operatorname{div}(f)(A^{-1}(x),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Die ersten zwei Gleichheiten folgen aus der obigen Bemerkung und der mehrdimensionalen Kettenregel (siehe Satz 11.13). Anschliessend verwenden wir, dass A linear ist, und dass $\operatorname{tr}(BC) = \operatorname{tr}(CB)$ für alle $n \times n$-Matrizen B und C.

□

Aufgabe 5. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{[0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{dvol}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Lösung. Sei $s \in (0,1)$ und $B_s = [0,1) \times [0,s)$. Dann ist $(x,y) \longmapsto (1-xy)^{-1}$ auf dem abgeschlossenen Quader $\overline{B_s} = [0,1] \times [0,s]$ stetig und damit Riemann-integrierbar (vgl. Proposition 13.11). Da der Rand ∂B_s eine Jordan-Nullmenge ist, folgt also aus der Gebietsadditivität des Riemann-Integrals (Proposition 13.34) und dem Satz von Fubini (Theorem 13.39)

$$\text{(1)} \qquad \int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{dvol}(x,y) = \int_{\overline{B_s}} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{dvol}(x,y) = \int_0^s \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \, dx \, dy.$$

Für fixiertes $y \in [0,s]$ wird die Funktion $x \longmapsto \frac{1}{1-xy}$ auf $[0,1]$ dargestellt von der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} y^k x^k$ in der Variablen x mit Konvergenzradius $1/y \geq 1/s > 1$ (vgl. Satz 7.56 und Beispiel 7.3). Satz 7.85 über die Integration von Potenzreihen impliziert also

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xy} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} y^k.$$

Dies ist nun eine Potenzreihe in y mit Konvergenzradius 1, sodass wir zusammen mit (1) aus erneuter Anwendung von Satz 7.85 die Identität

$$\int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{dvol}(x,y) = \int_0^s \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \, dx \, dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k^2}$$

erhalten. Letztere Potenzreihe in s hat Konvergenzradius 1 und konvergiert auch im Punkt $s = 1$. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Satz 7.65) gilt also

$$\lim_{s \nearrow 1} \int_{B_s} \frac{1}{1-xy} \, \mathrm{dvol}(x,y) = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

was aufgrund von Satz 13.74 zeigt, dass $(x,y) \longmapsto \frac{1}{1-xy}$ über $[0,1)^2$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_{[0,1)^2} \frac{1}{1-xy}\, \mathrm{dvol}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

$\square$

Aufgabe 6. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Lösung. Nach Satz 12.31 können wir A schreiben als $A = KDK^{-1}$ für eine orthogonale Matrix $K \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

mit $\lambda_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$. Aufgrund von $K^t = K^{-1}$ und $|\det(K)| = 1$ folgt dann aus der Substitutionsregel für uneigentliche Integrale (Theorem 13.76)

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle DK^{-1}x,K^{-1}x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Dx,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x),$$

sofern eines dieser uneigentlichen Integrale existiert. Sei $(B_m)_m$ die Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus den abgeschlossenen Quadern $B_m = [-m,m]^n \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $x \longmapsto e^{-\langle Dx,x\rangle}$ als stetige Funktion über jede der Mengen B_m Riemann-integrierbar (vgl. Proposition 13.11) und nach dem Satz von Fubini (Theorem 13.39) gilt

$$(3) \qquad \int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \int_{B_m} e^{-\lambda_1 x_1^2 - \cdots - \lambda_n x_n^2}\, \mathrm{dvol}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-m}^{m} e^{-\lambda_i x^2}\, dx.$$

Durch die Substitution $u = \sqrt{\lambda_i}x$ finden wir für letztere Integrale angesichts von Beispiel 13.69

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{-m}^{m} e^{-\lambda_i x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{-\sqrt{\lambda_i}m}^{\sqrt{\lambda_i}m} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Wegen $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(D) = \det(A)$ folgt aus (3) also

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Satz 13.74 besagt nun, dass $x \longmapsto e^{-\langle Dx,x\rangle}$ über $\mathbb{R}^n$ uneigentlich integrierbar ist, und zusammen mit (2) schliessen wir auf das gewünschte Resultat

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Dx,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) &= \lim_{m \longrightarrow \infty} \int_{B_m} e^{-\langle Dx,x\rangle}\, \mathrm{dvol}(x) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n}\rangle\, dL$ das Flussintegral durch den Rand von $B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?
  (a) Ist f divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.
  (b) $\underline{\text{Ist } f \text{ divergenzfrei, so hängt der Wert } I_r \text{ nicht von } r \text{ ab.}}$
  (c) Ist f rotationsfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.
  (d) $\underline{\text{Ist } f = rot(g) \text{ für ein Vektorfeld } g\text{, so ist } I_r = 0 \text{ für alle } r > 0.}$

(2) Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$ bezeichne $I = \int_B f\, d\,\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?
  (a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\, dx\, dy$
  (b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy.$
  (c) $\underline{I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy.}$
  (d) $\underline{I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x, y) \in B : f(x, y) \ge t\})\, dt.}$