Lösungen zur Übungsserie 10

Aufgabe 1. Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Vektorfeld. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [0,1] \to \partial B$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes, so gilt

$$\int_B \det(D_x f)\, d\mathrm{vol}(x) = \int_0^1 (f_1 \circ \gamma)\, (f_2 \circ \gamma)' dt = -\int_0^1 (f_1 \circ \gamma)'(f_2 \circ \gamma)\, dt.$$

Lösung. Die zweite Gleichung ergibt sich direkt durch partielle Integration. Für den Integranden des zweiten Integrals folgt mit der Kettenregel

$$(f_1 \circ \gamma)\, (f_2 \circ \gamma)' = (f_1 \circ \gamma)\, \langle (\nabla f_2) \circ \gamma, \gamma' \rangle = \langle (f_1 \nabla f_2) \circ \gamma, \gamma' \rangle,$$

somit ist das zweite Integral gerade das Wegintegral des Vektorfeldes $f_1 \nabla f_2 = (f_1\, \partial_1 f_2, f_1\, \partial_2 f_2)$ entlang γ. Die Rotation dieses Vektorfeldes ist

$$\begin{aligned} rot(f_1 \nabla f_2) &= \partial_1(f_1\, \partial_2 f_2) - \partial_2(f_1\, \partial_1 f_2) \\ &= \partial_1 f_1\, \partial_2 f_2 + f_1\, \partial_1 \partial_2 f_2 - \partial_2 f_1\, \partial_1 f_2 - f_1\, \partial_2 \partial_1 f_2 \\ &= \det(D.f), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt nach dem Satz von Schwarz $\partial_1 \partial_2 f_2 = \partial_2 \partial_1 f_2$ gilt (f ist C^2). Die erste Gleichung folgt somit aus dem Satz von Green.
Alternativ kann man das zweite Integral als Flussintegral des um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedrehten Vektorfeldes $(f_1\, \partial_2 f_2, -f_1\, \partial_1 f_2)$ durch ∂B auffassen. Die gleiche Rechnung wie oben zeigt, dass die Divergenz dieses Vektorfeldes □

Aufgabe 2. Berechnen Sie den von der Kurve

$$\gamma\colon t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto (\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2$$

eingeschlossenen Flächeninhalt.

Lösung. Wir folgen Beispiel 14.15 im Skript. Sei V die von γ eingeschlossenen Flächeninhalt. Es gilt $\gamma'(t) = (-\sin(t), 2\cos(2t)$. Dann gilt

$$2V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \gamma, R^{-1}\gamma' \rangle\, dt$$

wobei $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned} 2V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\sin(2t)\,dt = \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)(1-\sin^2(t))\,dt = 2\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

via $x = \sin(t)$. Wir schliessen $V = \frac{4}{3}$. □

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks $S \subset \mathbb{S}^2$ begrenzt durch die Längengrade $-\pi < \phi_1 < \phi_2 < \pi$ und Breitengrade $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

Lösung. Wir verwenden die Definition des Flächeninhalts aus Abschnitt 14.2.2, also

$$\operatorname{area}(S) = \int_S dA$$

wobei wir $\mathbb{S}^2$ (bis auf eine Nullmenge) durch sphärische Koordinaten

$$\Phi\colon (-\pi,\pi) \times (-\pi/2,\pi/2) \ni (\varphi,\theta) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Das Flächenelement $\mathrm{d}A$ ist wegen

$$\partial_\varphi \Phi \times \partial_\theta \Phi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben durch

$$\mathrm{d}A = \|\partial_\varphi \Phi \times \partial_\theta \Phi\|_2 \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Also ist das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} \int_S \mathrm{d}A &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= (\phi_2 - \phi_1)[\sin(\theta)]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= (\phi_2 - \phi_1)(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto g(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}$$

divergenzfrei?

Lösung. Wir nehmen zunächst an, dass f divergenzfrei ist. Dann gilt für $r_0, r_1 \in (0,\infty)$ mit $r_0 < r_1$ nach dem Divergenzsatz (Theorem 14.14) angewendet auf den glatt berandeten Bereich $\overline{K_{r_0,r_1}} = \overline{B_{r_1}(0)} \setminus B_{r_0}(0)$

$$\int_{\overline{K_{r_0,r_1}}} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL = 0.$$

Der Rand des Bereichs $\overline{K_{r_0,r_1}}$ besteht dabei aus zwei Teilen, nämlich den beiden Kreisen $\partial B_{r_0}(0)$ und $\partial B_{r_1}(0)$. In einer positiv orientierten Parametrisierung von $\partial\overline{K_{r_0,r_1}}$ wird dabei der äussere Kreis $\partial B_{r_1}(0)$ in mathematisch positiver und der innere Kreis $\partial B_{r_0}(0)$ in mathematisch negativer Richtung durchlaufen. Somit erhalten wir

$$0 = \int_{\overline{K_{r_0,r_1}}} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL = \int_{\partial B_{r_1}(0)} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL - \int_{\partial B_{r_0}(0)} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL,$$

oder in anderen Worten, dass die Funktion $(0,\infty) \ni r \longmapsto \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL$ konstant ist. Ist sie konstant $\tilde{c} \in \mathbb{R}$, so folgt unter Verwendung der Parametrisierung γ_r von $\partial B_r(0)$ aus Aufgabe 4 nach Einsetzen in die Definition von Flussintegralen

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n}\rangle dL \\
&= \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{f(\gamma_r(t))}_{=g(r)\gamma_r(t)/r}, \underbrace{R^{-1}\dot{\gamma}_r(t)}_{=\gamma_r(t)} \rangle \, dt \\
&= g(r)/r \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle \gamma_r(t), \gamma_r(t)\rangle}_{=\|\gamma_r(t)\|_2^2 = r^2} \, dt \\
&= 2\pi r g(r).
\end{aligned}$$

Die Funktion g ist also notwendigerweise von der Form $g(r) = c/r$ für eine Konstante $c = \tilde{c}/2\pi \in \mathbb{R}$.

Dass für derartige g das Vektorfeld f tatsächlich divergenzfrei ist, folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f)(x) &= \partial_1\left(\frac{cx_1}{\|x\|_2^2}\right) + \partial_2\left(\frac{cx_2}{\|x\|_2^2}\right) \\
&= \frac{c(x_1^2+x_2^2) - 2cx_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{c(x_1^2+x_2^2) - 2cx_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. $\square$

Aufgabe 5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein geschlossener, stetig differenzierbarer Weg und $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ ein Punkt ausserhalb der Spur $\gamma([a,b])$ von γ. Dann definieren wir die Umlaufzahl von γ um u durch

$$I_\gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\langle \gamma(t) - u, R^{-1}\dot{\gamma}(t)\rangle}{\|\gamma(t) - u\|_2^2} \, dt,$$

wobei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotationsmatrix um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet.

Wir betrachten nun speziell den Weg $\gamma_r\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto r\left(\begin{smallmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{smallmatrix}\right)$ für ein $r > 0$, welcher den Rand des r-Balls $B_r(0)$ in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert. Zeigen Sie für $u \notin \partial B_r(0)$, dass

$$I_{\gamma_r}(u) = \begin{cases} 1, & u \in B_r(0), \\ 0, & u \notin \overline{B_r(0)}. \end{cases}$$

Lösung. Für $u \notin \partial B_r(0)$ kann die Umlaufzahl $I_{\gamma_r}(u)$ von γ_r um u geschrieben werden als der Fluss des Vektorfelds

$$f_u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{u\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto \frac{x-u}{2\pi\|x-u\|_2^2}$$

durch $\partial B_r(0)$. Dieses Vektorfeld ist divergenzfrei. Dies kann man entweder nachrechnen oder man bemerkt, dass f_u genau die Translation um u eines der in Aufgabe 3 als divergenzfrei erkannten Vektorfelder ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1) $\underline{u \notin \overline{B_r(0)}}$: Dann ist f_u auf einer offenen Obermenge von $\overline{B_r(0)}$ definiert und Anwendung des Divergenzsatzes (Theorem 14.14) impliziert direkt

$$I_{\gamma_r}(u) = \int_{\partial B_r(0)} \langle f_u, \mathbf{n}\rangle dL = \int_{\overline{B_r(0)}} \operatorname{div}(f_u)\, d\mathrm{vol} = 0.$$

(2) $\underline{u \in B_r(0)}$: In diesem Fall können wir den Divergenzsatz nicht in obiger Form anwenden, da f_u nun nicht auf ganz $\overline{B_r(0)}$ definiert (geschweige denn stetig differenzierbar) ist. Wir können den Satz für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ aber auf den glatt berandeten Bereich $B = \overline{B_r(0)} \setminus B_\epsilon(u)$ anwenden. So erhalten wir (vgl. das Argument in der Lösung zu Aufgabe 3)

$$I_{\gamma_r}(u) = \int_{\partial B_r(0)} \langle f_u, \mathbf{n}\rangle dL = \int_{\partial B_\epsilon(u)} \langle f_u, \mathbf{n}\rangle dL,$$

was wir nach einer Translation um u unter Verwendung der Parametrisierung γ_ϵ von $\partial B_\epsilon(0)$ berechnen können als

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\epsilon(u)} \langle f_u, \mathbf{n}\rangle dL &= \int_{\partial B_\epsilon(0)} \langle f_0, \mathbf{n}\rangle dL \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\langle \gamma_\epsilon(t), R^{-1}\dot{\gamma}_\epsilon(t)\rangle}{\|\gamma_\epsilon(t)\|_2^2}}_{=1} dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n}\rangle\, dL$ das Flussintegral durch den Rand von $B = B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen und sei $J_r := \int_{\partial B} \langle f, dx\rangle$ das Wegintegral entlang ∂B. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

	W
(a) Ist f divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$..	
(b) Ist f divergenzfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.	X
(c) Ist f rotationsfrei, so hängt der Wert J_r nicht von r ab.	
(d) Ist f rotationsfrei, so ist $J_r = 0$ für alle $r > 0$.	

Sei $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, dann gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ aber $\int_{\partial B_r(0)} \langle f, dx\rangle = 2\pi$. Sei $g(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, dann gilt $\operatorname{div}(g) = 0$ aber $\int_{\partial B_r(0)} \langle g, d\mathbf{n}\rangle \, dL = 2\pi$.

(2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $0 \in U$, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$I_r = \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n}\rangle \, dL$$

der Fluss von f durch den Rand des r-Balles $B_r(0)$. Welche der folgenden Asymptotiken gelten im Allgemeinen für $r \searrow 0$?

	W
(e) $I_r = \operatorname{div}(f)(0) + o(1)$.	
(f) $I_r = o(r)$.	X
(g) $I_r = O(r^3)$.	
(h) $I_r = O(r^2)$.	X

(3) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B = [a,b] \times [c,d]$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Sei $\mathbf{n}$ ein Aussennormalenfeld auf B und

$$I_u = \int_a^b \langle f, \mathbf{n}\rangle(x,c)\; dx, \quad I_o = \int_a^b \langle f, \mathbf{n}\rangle(x,d)\; dx$$

$$I_l = \int_c^d \langle f, \mathbf{n}\rangle(a,y)\; dy, \quad I_r \int_c^d \langle f, \mathbf{n}\rangle(b,y)\; dy$$

Welche der folgenden Audrücke stimmt mit dem Fluss von f durch ∂B?

	W
(i) $I_u - I_o + I_r - I_l$	
(j) $I_u + I_o + I_r + I_l$	X
(k) $I_u + I_o - I_r - I_l$.	
(l) $-I_u + I_o - I_r + I_l$.	