Lösungen zur Übungsserie 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $(x, y, z) \longmapsto (x, y, z - x^2 - y^2)$ durch die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ von innen nach aussen.

Lösung. Die Divergenz des Vektorfelds ist konstant gleich 3, und das Volumen der Halbkugel ist $2\pi/3$, somit ist nach dem Divergenzsatz der Fluss durch die Oberfläche der Halbkugel gleich 2π. Davon ist noch der Fluss durch die Grundfläche G zu subtrahieren:

$$\int_G x^2 + y^2 \, d\,\mathrm{vol}(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\phi \, dr = \frac{\pi}{2},$$

der Fluss durch S ist also $2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$. □

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Wir erinnern daran, dass wir mit $\nabla\varphi$ den Gradienten von φ bezeichnen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(1) $\mathrm{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \,\mathrm{rot}\, f$,
(2) $\mathrm{div}(\varphi f) = \langle \nabla\varphi, f \rangle + \varphi \,\mathrm{div}\, f$,
(3) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, f) = 0$,
(4) $\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

Lösung.

(1) Es gilt mit der Produktregel angewandt auf φf_i für $i = 1, 2, 3$, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\varphi f) &= \begin{pmatrix} \partial_2(\varphi f)_3 - \partial_3(\varphi f)_2 \\ \partial_3(\varphi f)_1 - \partial_1(\varphi f)_3 \\ \partial_1(\varphi f)_2 - \partial_2(\varphi f)_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}(\varphi f_3)e_2 - \mathrm{D}(\varphi f_2)e_3 \\ \mathrm{D}(\varphi f_1)e_3 - \mathrm{D}(\varphi f_3)e_1 \\ \mathrm{D}(\varphi f_2)e_1 - \mathrm{D}(\varphi f_1)e_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_3(\nabla\varphi)_2 + \varphi\,\partial_2 f_3 - (f_2(\nabla\varphi)_3 + \varphi\,\partial_3 f_2) \\ f_1(\nabla\varphi)_3 + \varphi\,\partial_3 f_1 - (f_3(\nabla\varphi)_1 + \varphi\,\partial_1 f_3) \\ f_2(\nabla\varphi)_1 + \varphi\,\partial_1 f_2 - (f_1(\nabla\varphi)_2 + \varphi\,\partial_2 f_1) \end{pmatrix} = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \,\mathrm{rot}\, f
\end{aligned}$$

(2) Wir erhalten mit der Produktregel angewandt auf φf_i für $i = 1, 2, 3$, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\varphi f) &= \partial_1(\varphi f)_1 + \partial_2(\varphi f)_2 + \partial_3(\varphi f)_3 \\
&= \mathrm{D}(\varphi f_1)e_1 + \mathrm{D}(\varphi f_2)e_2 + \mathrm{D}(\varphi f_3)e_3 \\
&= f_1(\nabla\varphi)_1 + f_2(\nabla\varphi)_2 + f_3(\nabla\varphi)_3 + \varphi\partial_1 f_1 + \varphi\partial_2 f_2 + \varphi\partial_3 f_3 \\
&= \langle \nabla\varphi, f \rangle + \varphi \,\mathrm{div}\, f.
\end{aligned}$$

(3) Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) &= \partial_1(\operatorname{rot} f)_1 + \partial_2(\operatorname{rot} f)_2 + \partial_3(\operatorname{rot} f)_3 \\ &= \partial_1(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) + \partial_2(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) + \partial_3(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \\ &= \partial_{12} f_3 - \partial_{21} f_3 - \partial_{13} f_2 + \partial_{31} f_2 + \partial_{23} f_1 - \partial_{32} f_1 = 0\end{aligned}$$

nach dem Satz von Schwarz.

(4) Wir haben wieder mit dem Satz von Schwarz, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\nabla f) &= \begin{pmatrix} \partial_2(\nabla f)_3 - \partial_3(\nabla f)_2 \\ \partial_3(\nabla f)_1 - \partial_1(\nabla f)_3 \\ \partial_1(\nabla f)_2 - \partial_2(\nabla f)_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{23} f - \partial_{32} f \\ \partial_{31} f - \partial_{13} f \\ \partial_{12} f - \partial_{21} f \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene durch die Punkte $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$. Der Kreis $K \subseteq E$ durch diese drei Punkte sei so orientiert, dass e_1, e_2, e_3 in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Gegeben sei weiter das Vektorfeld $f\colon (x,y,z) \longmapsto (z-y, x+2yz, y^2)$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(1) die Rotation von f und
(2) das Wegintegral von f entlang von K.

Lösung.

(1) $\operatorname{rot}(f) = (0,1,2)$.
(2) Der Normalenvektor von E ist $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3})(1,1,1)$, und das Skalarprodukt $\langle \operatorname{rot}(f), \mathbf{n}\rangle = \sqrt{3}$ ist konstant. Mit dem Satz von Stokes erhält man für das Wegintegral deshalb $\sqrt{3}A$, wobei A der Flächeninhalt des Kreises ist. Da der Radius $\sqrt{2/3}$ beträgt, ist $A = 2\pi/3$ und das Wegintegral gleich $2\pi/\sqrt{3}$ ist.

□

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $B \subseteq U$ ein glatt berandeter, kompakter und zusammenhängender Bereich mit äusserem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}\colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, und sei $u\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit <u>Aussennormalableitung</u> $\partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle\colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_B \|\nabla u\|^2 \, d\operatorname{vol} = \int_{\partial B} u \partial_{\mathbf{n}} u \, dA$$

gilt und folgern Sie daraus, dass u auf B konstant sein muss, falls $u|_{\partial B} = 0$ oder $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ ist.

Lösung. Nach Aufgabe 2(2) gilt es:

$$\int_B \|\nabla u\|^2 \, d\operatorname{vol} = \int_B \langle \nabla u, \nabla u\rangle d\operatorname{vol} = \int_B \operatorname{div}(u\nabla u) d\operatorname{vol} - \int_B u \operatorname{div}(\nabla u)$$

Aber $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. Nach Divergenzsatz in 3d schliessen wir

$$\int_B \|\nabla u\|^2 \, d\,\mathrm{vol} = \int_{\partial B} \langle u \nabla u, \mathbf{n} \rangle \, dA = \int_{\partial B} u \partial_{\mathbf{n}} u \, dA$$

Falls $u|_{\partial B} = 0$ oder $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ folgt $\int_B \|\nabla u\|^2 \, d\,\mathrm{vol} = 0$ und somit $\nabla u = 0$ auf B, i.e. u ist auf B konstant. $\square$

Aufgabe 5. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)^t.$$

Für welche Werte von α, β, γ ist f rotationsfrei? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von f.

Lösung. Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma - (-1) \\ \alpha - 4 \\ \beta - 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass f für $\alpha = 4$, $\beta = 2$ und $\gamma = -1$ rotationsfrei ist.
Wir erhalten, dass

$$F(x, y, z) := \tfrac{1}{2} x^2 + 2xy + 4xz - \tfrac{3}{2} y^2 - yz + z^2$$

ein Potential von f ist. $\square$

Aufgabe 6. Seien $f \colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2(xz + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(yz - x)}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)^t$$

und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)^t, \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2)^t \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t) + 6, 3\sin(t), 3)^t. \end{aligned}$$

(1) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ von f und das Wegintegral $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle$ von f entlang γ_1. Ist f konservativ?
(2) Erklären Sie, wie aus dem Satz von Stokes folgt, dass $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma_2} \langle f, dx \rangle$.
(3) Folgt aus dem Satz von Stokes auch, dass $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma_3} \langle f, dx \rangle$?

Lösung.

(1) Verwendet man die Darstellung der Rotation aus Theorem 14.50, so kann man durch Nachrechnen verifizieren, dass f rotationsfrei ist. Das Wegintegral von f entlang γ_1

ist gemäss Definition

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \langle f, dx\rangle &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t)\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-2} dt \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Es folgt, dass f nicht konservativ sein kann, da Wegintegrale konservativer Vektorfelder entlang von Schlaufen stets verschwinden (vgl. Aufgabe 1 der Serie 6 oder den Beweis von Satz 11.49).

(2) Wird der Kegelmantelteil

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z/2,\ 0 < z < 2\}$$

durch das nach aussen zeigende Normalenfeld $\mathbf{n}\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert, so besteht der orientierte Rand von S genau aus dem Weg γ_1 und dem Umkehrweg von γ_2. Da $\overline{S}$ ganz im Definitionsbereich von f enthalten und f rotationsfrei ist, folgt aus dem Satz von Stokes (Theorem 14.50) also

$$\int_{\gamma_1} \langle f, dx\rangle - \int_{\gamma_2} \langle f, dx\rangle = \int_S \langle \operatorname{rot}(f), \mathbf{n}\rangle \, dA = 0.$$

(3) Die Kreisscheibe

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-6)^2 + y^2 \leq 9,\ z = 3\}$$

orientiert durch das nach oben zeigende Normalenfeld $\mathbf{n}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ hat als orientierten Rand genau den Weg γ_3. Somit gilt nach a) und dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma_3} \langle f, dx\rangle = \int_D \langle \operatorname{rot}(f), \mathbf{n}\rangle \, dA = 0 \neq -4\pi = \int_{\gamma_1} \langle f, dx\rangle.$$

Insbesondere zeigt dies, dass es nicht möglich ist, analog wie in b) eine Fläche zwischen γ_1 und γ_3 „einzuspannen", die samt Abschluss im Definitionsbereich von f enthalten ist.

□

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges (oder allgemeiner, einfach zusammenhängendes) Gebiet und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Eigenschaften sind dann im Allgemeinen äquivalent zur Konservativität von f ?

		W
(a)	f besitzt ein Potential.	X
(b)	f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.	X
(c)	f ist divergenzfrei.	
(d)	Falls $n = 2$ oder $n = 3$: f ist rotationsfrei.	X

(2) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Welche der folgenden Wege $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bilden zusammen eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von A?

		W
(e)	$\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$.	
(f)	$\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$	
(g)	$\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$.	
(h)	$\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$.	X