Lösungen zur Übungsserie 12

Aufgabe 1. (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, und seien

$$\Phi\colon U \longrightarrow V \text{ und } \tilde{\Phi}\colon \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

zwei lokale Parametrisierungen, d.h. Diffeomorphismen offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(V \cap \mathbb{R}^k) = U \cap M$ und $\tilde{\Phi}(\tilde{V} \cap \mathbb{R}^k) = \tilde{U} \cap M$ (wobei $\mathbb{R}^k$ für $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ steht). Weiter sei $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Zeigen Sie: Gibt es (in $\mathbb{R}^k$) Jordan-messbare Mengen $K \subset V \cap \mathbb{R}^k$ und $\tilde{K} \subset \tilde{V} \cap \mathbb{R}^k$ mit $\Phi(K) = \tilde{\Phi}(\tilde{K})$, so gilt

$$\int_K f \circ \Phi \sqrt{\operatorname{gram}_k(D\Phi)}\, d\operatorname{vol}_k = \int_{\tilde{K}} f \circ \tilde{\Phi} \sqrt{\operatorname{gram}_k(D\tilde{\Phi})}\, d\operatorname{vol}_k\,.$$

(2) Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen der Sphäre $M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ mittels einer Verallgemeinerung von Kugelkoordinaten.

Lösung.

(1) Wir betrachten den Diffeomorphismus $\Psi := \Phi^{-1} \circ \tilde{\Phi} : \tilde{V} \longrightarrow V$, so gilt für $x\tilde{K}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{gram}_k(D_x\tilde{\Phi}) &= \det((D_x\tilde{\Phi})^T \circ D_x\tilde{\Phi}) \\
&= \det((D_x(\Phi \circ \Psi)^T D_x(\Phi \circ \Psi)) \\
&= \det([D_{\Psi(x)}(\Phi) \circ D_x\Psi]^T [D_{\Psi(x)}(\Phi) \circ D_x\Psi]) \\
&= \det((D_x\Psi)^T \circ (D_{\Psi(x)}(\Phi))^T D_{\Psi(x)}(\Phi) \circ D_x\Psi) \\
&= \det(D_x\Psi)^2 \operatorname{gram}_k(D_{\Psi(x)}\Phi),
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Kettenregel folgt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}} f \circ \tilde{\Phi} \sqrt{\operatorname{gram}_k(D_x\tilde{\Phi})}\, d\operatorname{vol}_k &= \int_{\tilde{K}} f \circ \tilde{\Phi} \sqrt{\det(D_x\Psi)^2 \operatorname{gram}_k(D_{\Psi(x)}\Phi)}\, d\operatorname{vol}_k \\
&= \int_{\tilde{K}} f \circ \Phi \circ \Psi \sqrt{\operatorname{gram}_k(D_{\Psi(x)}\Phi)}\, |\det(D_x\Psi)|\, d\operatorname{vol}_k \\
&= \int_K f \circ \Phi \sqrt{\operatorname{gram}_k(D_y\Phi)}\, d\operatorname{vol}_k,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Substitutionsregel folgt.

(2) Wir definieren die verallgemeinerten Kugelkoordinaten durch

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{S}^3,$$
$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \\ \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) \\ \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\sin(\phi_3) \end{pmatrix}$$

und erhalten damit für die Gram-Matrix

$$\begin{aligned} \mathrm{gram}_3(D\Phi) &= \det(\langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle)_{ij} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\varphi_1)\sin^2(\varphi_2) \end{pmatrix} = \sin^4(\varphi_1)\sin^2(\varphi_2) \end{aligned}$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\mathbb{S}^3) &= \int_{\Phi(K)} d\,\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^3} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\mathrm{gram}_3(D\Phi)}\, d\,\mathrm{vol}_3 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\, d\phi_3\, d\phi_2\, d\phi_1\, dr \\ &= \pi \cdot 2 \cdot \pi = 2\pi^2. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$ und sei f ein rotationsfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω. Wir wollen folgendes zeigen:

$$\int_{\partial B_2(0)} \langle f, dx \rangle = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi \in C^2(\Omega) : \; f = \nabla \varphi$$

Zeigen Sie:

(1) Die Implikation $\Leftarrow$ gilt.
(2) Die Mengen $\Omega_\pm := \left\{ (x,y) \in \Omega \, : \, \pm y < \frac{1}{2} \right\}$ sind einfach zusammenhängend.
(3) Es existieren C^2-Funktionen $\varphi_\pm$ auf $\Omega_\pm$ mit $\nabla \varphi_\pm = f|_{\Omega_\pm}$.
(4) Die Implikation $\Rightarrow$ gilt.

Lösung.

(1) Nach Satz von Green erhalten wir

$$\int_{\partial B_2(0)} \langle f, dx \rangle = \int_{B_2(0)} \mathrm{rot}(f)\, d\mathrm{vol} = \int_{B_2(0)} \mathrm{rot}(\nabla\varphi)\, d\mathrm{vol} = 0$$

da $\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = 0$ (siehe S11).

(2) *Proof by picture*: $\Omega_\pm$ haben keine Löcher.

(3) Die Funktionen $f|_{\Omega_\pm}$ erfüllen die Integrabilitätsbedingungen (Gleichung 14.6 im Skript), da f rotationsfrei ist. Es folgt nach Sätze 14.64 und 11.49, dass $f|_{\Omega_\pm}$ ein Potential besitzen, da $\Omega_\pm$ einfach zusammenhängend ist. Wir schreiben diese Potentiale als $\varphi_\pm$ und erinneren, dass

$$\varphi_\pm(p) := \int_{\gamma_p^\pm} \langle f, dx\rangle$$

wobei $\gamma^\pm$ ein glatter Weg von ein fixierten Punkt $p_0 \in \Omega_- \cap \Omega_+$ nach p ist.

(4) Bemerke zuerst, dass (Ω_+, Ω_-) eine offene Überdeckung von Ω ist. Wir konstruieren φ mit Hilfe von $\varphi_\pm$. Betrachte die folgende Partition der Eins: sei $\lambda_+ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\lambda_+(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } y \in \Omega \setminus \Omega_- \\ -y + \frac{1}{2}, \text{ falls } y \in \Omega_+ \cap \Omega_- \\ 0, \text{ falls } y \in \Omega \setminus \Omega_+ \end{cases}$$

und sei $\lambda_- : \Omega_- \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\lambda_-(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } y \in \Omega \setminus \Omega_+ \\ y + \frac{1}{2}, \text{ falls } y \in \Omega_+ \cap \Omega_- \\ 0, \text{ falls } y \in \Omega \setminus \Omega_-. \end{cases}$$

Wir erweitern $\varphi_\pm$ auf Ω und definieren

$$\varphi := \lambda_+\varphi_+ + \lambda_-\varphi_-.$$

Da $\operatorname{supp}(\lambda_\pm) \subset \Omega_\pm$ ist φ eine C^2-Funktion. Da

$$\int_{\partial B_2(0)} \langle f, dx\rangle = 0$$

ist dann $\varphi_-|_{\Omega_- \cap \Omega_+} = \varphi_+|_{\Omega_- \cap \Omega_+}$. Somit gilt es

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \lambda_+\nabla\varphi_+ + \lambda_-\nabla\varphi_- - \varphi_+|_{\Omega_- \cap \Omega_+} + \varphi_-|_{\Omega_- \cap \Omega_+} \\ &= \lambda_+ f|_{\Omega_+} + \lambda_- f|_{\Omega_+} = f \end{aligned}$$

nach konstruktion von $\lambda_\pm$

$\square$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie maximale Lösungen folgender Anfangswertproblemen:

(1)

$$\sqrt{1+x^2}\,y' = xy^3, \quad y(0) = -1$$

(2)

$$xy' = y^2, \quad y(1) = 2$$

Lösung.

(1) Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int_{-1}^{y(x)} \frac{1}{y^3}\,dy = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \Leftrightarrow \frac{-1}{2y(x)} + \frac{1}{2} = \sqrt{1+x^2} - 1$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$$

Unter Beachtung der Anfangswertbedingung $y(0) = -1$ erhalten wir $y(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$. Der Term unter der äusseren Wurzel muss positiv sein, i.e.

$$3 - 2\sqrt{1+x^2} > 0$$

Dann:

$$4(1+x^2) < 9 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher gegeben durch

$$y\colon \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$$

(2) Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \Leftrightarrow \frac{-1}{y} + \frac{1}{2} = \ln|x| - 0$$
$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln|x|}$$

Der Nenner muss ungleich Null sein, i.e.

$$\ln|x| \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{e}\}$$

Ausserdem ist $\ln|x|$ für $x = 0$ nicht definiert. Die mögliche Definitionsbereiche unserer Lösung sind daher

$$(-\infty, -\sqrt{e}),\ (-\sqrt{e}, 0),\ (0, \sqrt{e}),\ (\sqrt{e}, \infty)$$

Da $0 < 1 < \sqrt{e}$, ist maximale Lösung des Anfangswertproblems ist daher durch

$$y\colon (0, \sqrt{e}) \longrightarrow \mathbb{R},\ \ x \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln|x|}$$

gegeben.

□

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' + y'' - 2y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(1) drei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sowie
(2) die Lösung des Anfangswertproblems $y''' + y'' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Lösung.

(1) e^x, $e^{-x}\cos(x)$, $e^{-x}\sin(x)$.

(2) Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung verwendet man den Ansatz $y = ce^{-x}$ und erhält $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$. Die allgemeine Lösung und ihre ersten zwei Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y &= Ae^x + \big(B\cos(x) + C\sin(x) - \tfrac{1}{2}\big)e^{-x}, \\ y' &= Ae^x + \big((C-B)\cos(x) - (B+C)\sin(x) + \tfrac{1}{2}\big)e^{-x}, \\ y'' &= Ae^x + \big(2B\sin(x) - 2C\cos(x) - \tfrac{1}{2}\big)e^{-x}. \end{aligned}$$

Die gegebene Anfangsbedingung führt somit auf das Gleichungssystem

$$A + B - \tfrac{1}{2} = 0, \quad A + C - B + \tfrac{1}{2} = 1, \quad A - 2C - \tfrac{1}{2} = 0$$

mit der Lösung $A = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$. Das Anfangswertproblem hat also die Lösung $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$, wie man leicht durch Einsetzen verifiziert.

□

Aufgabe 5. (Lineare Unabhängigkeit) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ genau d (das heisst, paarweise verschiedene) komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Funktionen

$$f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha_k x} \in \mathbb{C}$$

für $k = 1, \dots, d$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

Lösung. Angenommen die Aussage trifft nicht zu, dann gibt es ein d minimal so dass $\beta_1, \dots, \beta_d \in \setminus\{0\}$ existieren mit

$$\sum_{k=1}^{d} \beta_k e^{\alpha_k x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren die Gleichung $\sum_{k=1}^{d} \beta_k e^{\alpha_k x} = 0$ mit $e^{-\alpha_d x}$ und erhalten

$$\sum_{k=1}^{d-1} \beta_k e^{(\alpha_k - \alpha_d)x} + \beta_d = 0.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wenden nun die Ableitung D genau $\deg(q_\ell) + 1$-mal an.
Wir wenden nun die Ableitung an und erhalten

$$0 = \sum_{k=1}^{d-1} (\alpha_k - \alpha_d)\beta_k e^{(\alpha_k - \alpha_d)x},$$

und damit eine Linearkombination der Null mit weniger als d Summanden, ein Widerspruch.
□

Aufgabe 6. Sei U ein sternförmiges Gebiet und seien $\gamma_0, \gamma_0 \colon [0,1] \longrightarrow U$ zwei Wege in U mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finden Sie eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1.

Lösung. Wir zeigen, dass jeder geschlossene Weg zum konstanten Weg am Anfangs- und Endpunkt homotop ist. Daraus folgt dann, dass γ_0 und γ_1 homotop sind.
Sei γ ein geschlossener Weg in U mit Anfangs- und Endpunkt $x_0 := \gamma(0)$. Sei z ein Zentrum von U. Setze

$$H(t,s) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } 0 \leq t \leq s/3 \\ \gamma\left(\frac{t-s/3}{1-2s/3}\right) & \text{falls } s/3 \leq t \leq 1-s/3, \\ x_0 & \text{falls } s/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist H eine Homotopie von γ zu dem Weg $\tilde{\gamma}$, der γ dreimal so schnell durchläuft und eine Pause vor und nach dem Durchlaufen macht. Es ist

$$H(t,0) = \gamma(t),\ H(t,1) = \tilde{\gamma}(t),\ H(0,s) = x_0,\ H(1,s) = x_0.$$

Nun definieren wir eine Homotopie $\tilde{H}$ die von $\tilde{\gamma}$ zu einem Weg $\tilde{\tilde{\gamma}}$ geht, der im ersten Drittel der Zeit von x_0 nach z geht, dann dort verweilt und im letzten Drittel der Zeit zurück nach x_0 geht. Sei dazu

$$\tilde{H}(t,s) := \begin{cases} (1-s)x_0 + s((1-3t)x_0 + 3tz) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/3 \\ (1-s)\tilde{\gamma}(t) + sz & \text{falls } 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ (1-s)x_0 + s((3-3t)z + (3t-2)x_0) & \text{falls } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Homotopie hat Bild in U, da U als sternförmig angenommen wurde und z das Zentrum von U ist. Wir bemerken wieder, dass

$$\tilde{H}(t,0) = \tilde{\gamma}(t),\ \tilde{H}(t,1) = \tilde{\tilde{\gamma}}(t),\ \tilde{H}(0,s) = x_0,\ \tilde{H}(1,s) = x_0.$$

Nun definieren wir eine Homotopie

$$\tilde{\tilde{H}}(t,s) := (1-s)\tilde{\tilde{\gamma}}(t) + tx_0$$

von $\tilde{\tilde{\gamma}}$ zum konstanten Weg $\gamma_c = x_0$. Alle Homotopien zusammengesetzt ergeben eine Homotopie von γ zum konstanten Weg an x_0, was zeigt, dass γ nullhomotop ist. □

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

		W
(a)	$u'(t) = u(t) \cdot u(t)$.	☐
(b)	$u''(t) - \sin(t)u(t) = \cos(u(t))$.	☐
(c)	$u'''(t) = \log(t)u(t) + e^t u'(t) + t^2 u''(t)$.	X
(d)	$u(x) = e^{u'(t)}$.	☐

(2) Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ können als Lösungen einer homogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten auftreten?

	W
(e) $x \longmapsto e^x(\cos(x) - \sin(x) - 1)$.	$\boxed{\text{X}}$
(f) $x \longmapsto x^2 e^x$.	$\boxed{\text{X}}$
(g) $x \longmapsto x\cos(x)$.	$\boxed{}$
(h) $x \longmapsto x\cosh(x)$	$\boxed{\text{X}}$