Lösungen zur Übungsserie 13

Aufgabe 1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösung. Die zugehörige homogene Gleichung besitzt das charakteristische Polynom $(\lambda+2)^2$ und hat somit die allgemeine Lösung $y_0(x) = (a + bx)e^{-2x}$. Für das Anfangswertproblem genügt der Ansatz $y(x) = cx^2e^{-2x}$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= (2cx - 2cx^2)e^{-2x}, \\ y''(x) &= (2c - 8cx + 4cx^2)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung gibt $c = 1$. □

Aufgabe 2 (Produktregel für matrixwertige Funktionen)**.** Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. Seien $a < b$ reelle Zahlen und seien $t \in [a, b] \longmapsto A(t) \in \mathrm{Mat}_{\ell,m}(\mathbb{R})$ und $t \in [a, b] \longmapsto B(t) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auch $t \in [a, b] \longmapsto A(t)B(t)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\tfrac{d}{dt}\big(A(t)B(t)\big) = \big(\tfrac{d}{dt}A(t)\big)B(t) + A(t)\big(\tfrac{d}{dt}B(t)\big)$$

für alle $t \in [a, b]$.

Lösung. Wir schreiben

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \text{ und } B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j}$$

wobei $a_{ij}, b_{ij} \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. Dann ist z.B. $\frac{d}{dt}A(t) = \big(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\big)$. Man erinnert aus der Lineare Algebra, dass

$$(A(t)B(t))_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)b_{kj}(t)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \big(\tfrac{d}{dt}(A(t)B(t))\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} \big(\tfrac{d}{dt}a_{ik}(t)\big)\, b_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(t)\, \big(\tfrac{d}{dt}b_{kj}(t)\big) = \\ &= \big(\big(\tfrac{d}{dt}A(t)\big)\, B(t)\big)_{ij} + \big(A(t)\, \big(\tfrac{d}{dt}B(t)\big)\big)_{ij} \end{aligned}$$

und damit $\frac{d}{dt}\big(A(t)B(t)\big) = \big(\frac{d}{dt}A(t)\big)B(t) + A(t)\big(\frac{d}{dt}B(t)\big)$. □

Aufgabe 3. In dieser Übung möchten wir die Exponentialabbildung weiter erkundschaften.

(1) Berechnen Sie zu $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ die Diagonalmatrix

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Differentialgleichung in dem Fall

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} x$$

und das zugehörige Vektorfeld.

(2) Berechnen Sie $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und interpretieren Sie wie zuvor die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

und das zugehörige Vektorfeld.

(3) Sei $\mathcal{J}$ die $d \times d$-Matrix, die über der Diagonalen Einsen und sonst nur Nullen stehen hat. Zeigen Sie, dass

$$\exp(t\mathcal{J}) = I_d + t\mathcal{J} + \tfrac{t^2}{2}\mathcal{J}^2 + \ldots + \tfrac{t^{d-1}}{(d-1)!}\mathcal{J}^{d-1}$$

und kommentieren Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \mathcal{J}x$.

Lösung.

(1) Es ist einfach zu sehen, dass

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d^k \end{pmatrix}$$

für alle $k \geq 0$. Nach Linearität gilt es dann

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{a_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k\geq 0} \frac{a_d^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_d} \end{pmatrix}$$

Die DG

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} x$$

mit einem beliebigen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ hat somit Lösung

$$x(t) = \exp\left(t\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right) x_0 = \begin{pmatrix} e^{ta_1} & 0 \\ 0 & e^{ta_2} \end{pmatrix} x_0$$

Startet man also bei x_0, so bewegt sich in radialer Richtung ins Unendliche mit Linear zunehmende Geschwindigkeit.

(2) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $k \geq 2$. Dann ist

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_d + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die DG

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

mit einem beliebigen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ hat somit Lösung

$$x(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) x_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0$$

Startet man also bei $x_0 = (a, b)$, so bewegt sich:

- nicht, falls $b = 0$ ist;
- mit konstante Geschwindigkeit nach Rechts, falls $b > 0$ ist;
- mit konstante Geschwindigkeit nach Links, falls $b < 0$ ist.

(3) Wir zeigen per Induktion auf d, dass das charakteristische Polyonom von $\mathcal{J}$ gleich T^d ist (anders gesagt, alle Eigenwerte sind 0). Sei $d = 2$, dann ist $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit ist $\mathcal{J} - TI_2 = \begin{pmatrix} -T & 1 \\ 0 & -T \end{pmatrix}$ und $\det(\mathcal{J} - TI_2) = T^2$. Dies beweist die Behauptung für $d = 2$. Für allgemeine d entwickeln wir die Determinante von $\mathcal{J}$ nach der letzen Spalte (siehe Matrix der Cofaktoren) und benutzt man der Induktionsschritt. Mittels Cayley-Hamilton folgt, dass $\mathcal{J}^d = 0$ ist. Die Behauptung

$$\exp(t\mathcal{J}) = I_d + t\mathcal{J} + \tfrac{t^2}{2}\mathcal{J}^2 + \ldots + \tfrac{t^{d-1}}{(d-1)!}\mathcal{J}^{d-1}$$

folgt dann direkt.

Sei $x(t)$ eine Lösung von

$\square$

Aufgabe 4. (1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = \sin(x).$$

(2) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

(3) Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4, \quad y(1) = 1$$

Lösung.

- Zuerst bestimmen wir die homogene Lösung, d.h. die Lösung von

$$y_h'' - 4y_h' + 4y_h = 0$$

Das characteristische Polynom ist $p(T) = T^2 - 4T + 4 = (T-2)^2$. Damit gilt

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{2x}$$

für $A, B \in \mathbb{C}$. Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $y_p(x) = C\sin(x) + D\cos(x)$. Es gilt daher

$$y_p'(x) = C\cos(x) - D\sin(x) \text{ und } y_p'(x) = -C\sin(x) - D\cos(x)$$

Wir setzen y_p, y_p' und y_p'' in $y'' - 4y' + 4y = \sin(x)$ und erhalten

$$(3C + 4D)\sin(x) + (-4C + 3D)\cos(x) = \sin(x)$$

Da sin und cos linear unabhangig sind, gilt nach Vergleich der Koeffizienten, dass

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

somit ist unsere partikuläre Lösung gleich $y_p(x) = \frac{1}{25}(3\sin(x) + 4\cos(x))$. Wir schliessen ab, dass

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx)e^{2x} + \frac{1}{25}(3\sin(x) + 4\cos(x))$$

mit $A, B \in \mathbb{C}$ die allgemeine Lösung unserer DG ist.

- Zuerst bestimmen wir die homogene Lösung, d.h. die Lösung von

$$y_h'' - y_h = 0$$

Das characteristische Polynom ist $p(T) = T^2 - 1$. Damit gilt

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

für $A, B \in \mathbb{C}$. Da die rechte Seite unserer DG gleich x ist, machen wir den Ansatz $y_p = Cx$, $C \in \mathbb{C}$, für die partikuläre Lösung (siehe S.403 im Skript). Es gilt daher $y_p'(x) = C$ und $y_p''(x) = 0$. Wir setzen y_p, y_p' und y_p'' in $y'' - y = 0$ und erhalten $-Cx = x$, i.e. $C = -1$. Damit ist die allgemeine Lösung gleich

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} - x$$

Wir lösen jetzt den Anfangswertproblem. Aus $y(0) = 1$ erhalten wir $A + B = 1$, und aus $y'(0) = 3$ erhalten wir $A - B = 4$. Wir schliessen $A = \frac{5}{2}$ und $B = \frac{-3}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblem ist dann

$$y(x) = \frac{5}{2}e^x - \frac{3}{2}e^{-x} - x.$$

- Zuerst bestimmen wir die homogene Lösung, d.h. die Lösung von

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = 0$$

Da wir am Ende die Anwangswertproblem $y(1) = 1$ lösen wollen, nehmen wir $x > 0$ an. Diese DG ist separierbar. Es gilt

$$-\frac{y'(x)}{y(x)} = 1 + \frac{4}{x}$$

aus welchem erhalten wir $y(x) = Ae^x x^4$. Da die rechte Seite unserer DG gleich x^4 ist, machen wir den Ansatz $y_p = Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fx + G$, $C, D, E, F, G \in \mathbb{C}$, für die partikuläre Lösung (siehe S.403 im Skript). Es gilt daher

$$y_p'(x) = 4Cx^3 + 3Dx^2 + 2Ex + F$$

Wir erhalten

$$(4Cx^3 + 3Dx^2 + 2Ex + F) - \left(\frac{4}{x} + 1\right)(Cx^4 + Dx^3 + Ex^2 + Fx + G) = x^4$$

Nach Koeffizientenvergleich gilt dann $G = F = E = D = 0$ und aus

$$4Cx^3 - \left(\frac{4}{x} + 1\right) Cx^4 = x^4$$

erhalten wir $-Cx^4 = x^4$ und schliesslich $C = -1$. Damit ist die allgemeine Lösung gleich

$$y(x) = x^4(Ae^{-x} - 1)$$

Wir lösen jetzt den Anfangswertproblem. Aus $y(1) = 1$ erhalten wir

$$Ae - 1 = 1$$

i.e. $A = \frac{2}{e}$. Die Lösung des Anfangswertproblem ist dann

$$y(x) = \frac{x^4(2e^x - e)}{e}.$$

□

Aufgabe 5. Wir nehmen hier, nebst den Annahmen in des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf, an, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ autonom und in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $0 \in \mathbb{R}^2$ definiert ist. Des Weiteren setzen wir voraus, dass $f(0) = 0$ ist. Das heisst, dass die konstante Funktion $t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = 0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ löst. Wir wollen das Verhalten von Lösungen zu einem

Anfangswert nahe bei der 0 in verschiedenen Situationen untersuchen.
Angenommen

$$f(x) = Ax + o(\|x\|) \quad \text{für } x \longrightarrow 0$$

für $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Sei $x : I \to \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung.

(1) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt, d.h. eine Umgebung von U von Null, so dass folgendes gilt: wenn $x(t_0) \in U$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = 0$.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $H(x) = \|x\|^2$.

Lösung. Siehe *Lyapunov Funktionen.*

(1) Wir schreiben $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ und $f(x) = Ax + g(x)$ wobei $g(x) = (g_1(x), g_2(x)) \in o(||x||)$. Es gilt dann

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) + g_1(x(t)) \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) + g_2(x(t)) \end{cases}$$

Sei x eine maximale Lösung und $\lambda := \max(\lambda_1, \lambda_2) < 0$. Wir berechnen für $x(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H \circ x(t) &= \frac{d}{dt}||x||^2 = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' = 2x_1(\lambda_1 x_1(t) + g_1(x(t))) + 2x_2(\lambda_2 x_2(t) + g_2(x(t))) = \\ &= 2\lambda_1 x_1^2 + 2\lambda_2 x_2^2 + 2\langle x, g\rangle \leq 2\lambda||x||^2 + 2||x||||g(x)|| = \\ &= 2||x||^2 \left(\lambda + \frac{||g(x))||}{||x||}\right) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\lambda + \varepsilon < 0$. Da $g(x) \in o(||x||)$ es gibt ein $\delta > 0$ so dass $|g(x)| \leq \varepsilon||x||$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Sei t_0 so dass $x(t_0) \in B_\delta(0)$, dann

$$\frac{d}{dt} H \circ x(t) \leq 2||x||^2 \left(\lambda + \frac{||g(x))||}{||x||}\right) < 2||x||^2(\lambda + \varepsilon) < 0$$

Bemerke, dass $x(t_0) \in B_\delta(0)$ impliziert, dass $x(t) \in B_\delta(0)$ für alle $t \geq t_0$, da $||x(t)||$ mit der Zeit abnimmt. Wir schliessen

$$\exists t_0 : \ x(t_0) \in B_\delta(0) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} ||x(t)|| = 0$$

da H immer nicht-negativ ist. Dies ist äquivalent zur Behauptung für $U := B_\delta(0)$.

(2) Analog.

□

Aufgabe 6. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (Sie müssen Spezialfälle, die durch das Verschwinden von gewissen Ausdrücken im Lösungsverfahren entstehen, nicht weiter untersuchen):

(1) $(x^2 - x)y' = y^2 + y$,

(2) $y' + e^y = 1$,
(3) $xy' = 1 - y^2$,
(4) $y'x^2 = y^2 + yx + x^2$.

Lösung.

(1) Wir separieren die Variabeln und erhalten

$$\frac{y'}{y^2+y} = \frac{1}{x^2-x},$$

welches dasselbe ist wie

$$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$

und nachdem wir nach x integrieren, erhalten wir

$$\log\left|\frac{y}{y+1}\right| = \log\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

mit einer beliebigen Konstante C. Es folgt

$$\frac{y}{y+1} = \tilde{C}\frac{x-1}{x},$$

wobei die zwei Möglichkeiten $\widetilde{C} = e^C$ oder $\widetilde{C} = -e^C$ aus dem Wegnehmen des Betrages folgen. Wir lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} yx &= \tilde{C}(x-1)(y+1) \\ y(x) &= \frac{\tilde{C}(x-1)}{x - \tilde{C}(x-1)}. \end{aligned}$$

(2) Wir separieren die Variabeln und erhalten

$$\frac{y'}{1-e^y} = 1.$$

Die rechte Seite integriert (mit Substitution $e^y = z$, $dz/dy = e^y = z$) ist

$$\int \frac{1}{1-e^y}dy = \int \frac{1}{(1-z)z}dz = \int \frac{1}{1-z}dz + \int \frac{1}{z}dz = \log\left|\frac{z}{z-1}\right| = -\log\left|\frac{z-1}{z}\right|$$

und darum

$$\log\left|\frac{e^y-1}{e^y}\right| = -x - C$$

mit einer beliebigen Konstante C. Wir lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} \frac{e^y-1}{e^y} &= \tilde{C}e^{-x} \\ e^y &= \frac{1}{1-\tilde{C}e^{-x}} \\ y(x) &= -\log(1-\tilde{C}e^{-x}), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C}$ wie in (a) definiert ist.

(3) Wir separieren die Variabeln und erhalten

$$\frac{y'}{1-y^2} = \frac{1}{x},$$

welches dasselbe ist wie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y+1} - \frac{y'}{y-1}\right) = \frac{1}{x},$$

und nachdem wir nach x integrieren, erhalten wir

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \log|x| + C$$

mit einer beliebigen Konstante C. Wir formen um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \log|x| + C \\ \log\left|\frac{y+1}{y-1}\right| &= \log(|x|^2) + 2C = \log(x^2) + 2C \end{aligned}$$

und lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} \frac{y+1}{y-1} &= \tilde{C}x^2 \\ y(x) &= \frac{\tilde{C}x^2+1}{\tilde{C}x^2-1}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} = \pm e^{2C}$ analog zu (a) definiert ist.

(4) Wir können die Variabeln nicht direkt separieren. Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$

Wir benutzen die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ für $x \neq 0$. Bemerke, dass

$$z'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2}$$

i.e.

$$y' = xz' + z$$

Wir erhalten die Differentialgleichung

$$xz' + z = z^2 + z + 1$$

Wir separieren die Variabeln $\frac{z'}{z^2+1} = \frac{1}{x}$ und integrieren nach x

$$\arctan(z) = \ln|x| + C$$

für einer beliebigen Konstante C, i.e.

$$z = \tan(\ln|x| + C)$$

Zurück zu y:

$$y(x) = x\tan(\ln|x| + C)$$

□

Aufgabe 7. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Übung 8.(3).

Lösung. Gegenbeispiel: $n = 1$, $U = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \neq x\}$, $f(t,x) = 1/(x-t)$, $(t_0, x_0) = (0,1)$. Dann ist f auf U stetig differenzierbar, also lokal Lipschitz-stetig. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard–Lindelöf (Theorem 14.23) kann man durch eine Rechnung überprüfen, dass die maximale Lösung gegeben ist durch $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t+1$. Insbesondere gilt $I_{\max} = \mathbb{R}$ und wir können $K = [0,2]$ wählen. Die Picard-Iteration ist aber nicht einmal auf ganz K (geschweige denn $I_{\max}$) definiert. In der Tat, es ist $x^{(0)} = 1$ und

$$x^{(1)}(t) = 1 + \int_0^t f\big(s, x^{(0)}(s)\big)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s = 1 - \log(1-t).$$

$\square$

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für welche der folgenden Differentialgleichungen bildet die Menge aller Lösungen einen Vektorraum?

		W
(a)	$y' - 2y = 0.$	X
(b)	$x(y')^2 - 2y = 0.$	
(c)	$y' - x\sqrt{\lvert y\rvert} = 0.$	
(d)	$y' - y = 1.$	
(e)	$y' - x^2 y = 0.$	X

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ treffen im Allgemeinen zu?

		W
(f)	Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\longrightarrow\infty} \|x(t)\|_2 = \infty$ wächst für $t \longrightarrow \infty$ exponentiell.	
(g)	Genau dann existiert eine nichttriviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, wenn A nichttrivialen Kern besitzt.	X
(h)	Ist A reell diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.[1]	X
(i)	Ist A komplex diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.[2]	

(3) Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig im Ort und $(t_0, x_0) \in U$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0,$$

aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf eine maximale Lösung $x\colon I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit Graph in U. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für die Picard-Iteration zu diesem Anfangswertproblem?

---

[1]Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte mit zugehöriger Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n$$

für beliebige $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. (In der Tat, die Funktionen $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \le j \le n$ sind Lösungen, und nach Aufgabe 4 sind sie auch linear unabhängig. Da der Lösungsraum n-dimensional ist, vgl. Proposition 14.15 und/oder 14.40, bilden diese Funktionen also eine Basis des Lösungsraums.) Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ (vgl. Übung 9.71) gilt für eine Konstante $C > 0$ dann

$$\|x(t)\|_2 \ge C \max\{|c_1| \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, |c_n| \mathrm{e}^{\lambda_n t}\}.$$

Ist 0 also nicht unter den Eigenwerten und ist einer der Werte c_j ungleich 0, so strebt $\|x(t)\|_2$ entweder für $t \longrightarrow \infty$ oder für $t \longrightarrow -\infty$ gegen ∞.

[2]Gegenbeispiel: $n = 2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $x(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist x eine nichttriviale beschränkte Lösung und die Eigenwerte von A sind $\pm\mathrm{i}$. Da diese verschieden sind, ist A insbesondere komplex diagonalisierbar.

Es sei angemerkt, dass das Argument aus (c) jedoch impliziert, dass ein Eigenwert mit Realteil 0 existieren muss.

W

(j) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Picard-Iteration auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gleichmässig gegen $x|_I$ konvergiert. [X]

(k) Die Picard-Iteration konvergiert auf $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_{I_{\max}}$. [ ]

(l) Die Picard-Iteration konvergiert auf jedem kompakten Teilintervall K von $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x|_K$. [ ]