Übungsserie 1

Abgabe bis zum 2. März

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Wir betrachten $a < b$ in $\mathbb{R}$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ und den *Rotationskörper*

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\right\},$$

und definieren das *Volumen des Rotationskörpers* durch

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

und die *Oberfäche* durch

$$2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} f(x) dx.$$

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des 'uneigentlichen Rotationskörpers', der entsteht, wenn man das Gebiet unter dem Graphen der Funktion $x \in [1, \infty)$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 2. Für eine reguläre ebene C^2-Kurve $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, definiert man die *Krümmung* an der Stelle t durch

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

(1) Berechnen Sie die Krümmung der Kurven $t \longmapsto (r\cos(t), r\sin(t))$ $(r > 0)$ und $t \longmapsto (t, \sin(t))$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Wie verhält es sich mit dem Vorzeichen der Krümmung?

(2) Zeigen Sie: Ist $\gamma \circ \psi \colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^2-Reparametrisierung von $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt $\kappa_{\gamma\circ\psi}(s) = \kappa_\gamma(\psi(s))$ für alle $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$d_{1/2}(x, y) := \sqrt{d(x, y)} \text{ und } \tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

für $x, y \in X$ zwei Metriken auf X definieren.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

(1) Zeigen Sie, dass Y° eine offene Teilmenge von X ist und jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ enthält.

(2) Zeigen Sie, dass $\overline{Y}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist und in jeder abgeschlossenen Teilmenge $Y \subseteq A$ enthalten ist.

Aufgabe 5. (Traktrix/Schleppkurve). Eine stetig differenzierbare Funktion $x\colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $t \longmapsto x(t)$, werde so gewählt, dass $x(0) = 0$ gilt und die Kurve $\gamma\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), e^{-t})$, nach Bogenlänge parametrisiert sei.

(1) Bestimmen Sie $t \longmapsto x(t)$ und skizzieren Sie die Kurve γ.

Hinweis: Die zweite Komponente von $\gamma(t) + \dot{\gamma}(t)$ ist stets null. Was bedeutet dies geometrisch?

(2) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa_\gamma(t)$ für $t > 0$ und untersuchen Sie das Verhalten für $t \longrightarrow 0$ und $t \longrightarrow \infty$.

Aufgabe 6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(1) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen auf V die gleiche Topologie und den gleichen Konvergenzbegriff induzieren.

(2) Zeigen Sie, dass die Normäquivalenz (wie der Name sagt) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf V definiert.

Erinnerung (Definition 10.8): Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V sind äquivalent falls $c, C > 0$ existieren so dass

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\|$$

für alle $v \in V$ gilt.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Beispiele sind metrische Räume?

W

(a) $(\mathrm{B}(X), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{B}(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von einer nichtleeren Menge X nach $\mathbb{R}$ bezeichnet und ☐

$$\mathrm{d}(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

für $f, g \in \mathrm{B}(X)$.

(b) $((0, \infty), \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ für $x, y \in (0, \infty)$. ☐

(c) $(\{0, 1\}^{2023}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y)$ die Anzahl der Stellen bezeichnet, in der sich zwei Elemente $x, y \in \{0, 1\}^{2023}$ unterscheiden. ☐

(d) $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ für Vektoren $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. ☐

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subseteq X$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	$\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$	☐
(f)	$\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} \subseteq \overline{Y_1 \cap Y_2}$	☐
(g)	$\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$	☐
(h)	$\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$	☐

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine nicht-leere Teilmenge. Wir definieren die Funktion

$$d(\cdot, A) : X \longrightarrow [0, \infty)$$

via $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$. Was gilt im Allgemeinen?

		W
(i)	Ist A abgeschlossen und $x \in A^c$, dann gilt $d(x, A) > 0$.	☐
(j)	Die Menge $M := \{x \in X \parallel d(x, A) \geq 1\}$ ist abgeschlossen in X.	☐
(k)	Für $x, y \in X$ gilt $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$	☐
(l)	Ist A° nicht-leer und ist $x \in X$, dann ist $d(x, A) = d(x, A^\circ)$.	☐