Übungsserie 2

Abgabe bis zum 9. März

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (Stetige Funktionen durch Fallunterscheidung). Seien X, Y zwei metrische Räume und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ zwei abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$. Angenommen $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ sind zwei stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die damit wohldefinierte Funktion

$$f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1, \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 2. (Zusammenhang vs. Wegzusammenhang). Zeigen Sie, dass der Teilraum

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \sqcup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 3. (1) Auf einem metrischen Raum X sei eine Relation so erklärt, dass $x \sim y$ genau dann gilt, wenn ein Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ von x nach y existiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(2) Zeigen Sie: Ist $X \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) eine offene Teilmenge, so sind die Äquivalenzklassen von $\sim$ offen und abgeschlossen in X.

(3) Schliessen Sie aus (b), dass eine nicht-leere offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^d$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn O zusammenhängend ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass ein metrischer Raum X genau dann überdeckungskompakt ist, wenn X das folgende *endliche Schnittaxiom (finite intersection axiom)* erfüllt: Ist $\mathcal{A}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X mit leerem Schnitt $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} A = \varnothing$, so existiert eine endliche Teilmenge $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcap_{a \in \mathcal{A}'} A = \varnothing$. (Oder äquivalent ausgedrückt: Ist $\mathcal{A}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X, und ist der Schnitt von je endlich vielen davon nicht leer, so ist auch $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} A \neq \varnothing$. Diese Eigenschaft wird im Skript *Schachtelungsprinzip* genannt.)

Aufgabe 5. Sei $\alpha > 1$. Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz und dessen Beweis, um zu zeigen, dass die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + \alpha}, \quad \text{für } n \geq 2,\ x_1 = 0$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6. Sei X ein metrischer Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen ohne auf Satz 10.53 zurückzugreifen.

(1) Ist X folgenkompakt, so besitzt X eine Lebesgue-Zahl und X ist total beschränkt.

(2) Ist X überdeckungskompakt, so nimmt jede stetige, reellwertige Funktion ein Maximum und ein Minimum an.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Aussagen über vollständige metrische Räume gelten im Allgemeinen?

		W
(a)	Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.	☐
(b)	Jede Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.	☐
(c)	Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ist vollständig.	☐
(d)	Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen	☐

(2) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	☐
(f)	Abzählbare Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	☐
(g)	Beliebige Vereinigungen von kompakten Teilmengen von X sind kompakt.	☐
(h)	Abzählbare Durchschnitte kompakter Teilmengen von X sind kompakt.	☐