Übungsserie 3

Abgabe bis zum 16. März

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. In dieser Übung möchten wir zeigen, dass für gewisse stetige, bijektive Funktion auch deren Inverse stetig ist.

(1) Wir beginnen mit einem Gegenbeispiel zur allgemeinen Aussage. Finden Sie metrische Räume X, Y und eine bijektive, stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.

(2) Seien X, Y metrische Räume und $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv und stetig. Zeigen Sie, dass f^{-1} stetig ist, falls X kompakt ist.

Aufgabe 2. (Alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent). Sei $d \geq 1$ und seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$. Wir möchten in folgenden Schritten zeigen, dass $\|\cdot\|$,und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind.

(1) Erklären Sie, wieso Sie annehmen können, dass $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$die Einsnorm ist.

(2) Finden Sie eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\| \leq C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Schliessen Sie daraus auch, dass $\|\cdot\|\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich der euklidischen Metrik d_2 stetige Abbildung ist.

(3) Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum annimmt.

(4) Verwenden Sie (3) um eine Konstante $C' > 0$ mit $C'\|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ zu finden und schliessen Sie damit auf die zu beweisende Aussage.

Aufgabe 3. (Summen- und Produktregel) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Funktionen. Angenommen f_1 und f_2 sind differenzierbar bei $x_0 \in U$.

(1) Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 + f_2) = \mathrm{D}_{x_0} f_1 + \mathrm{D}_{x_0} f_2$$

erfüllt.

(2) Sei jetzt $m = 1$. Zeigen Sie, dass $f_1 \cdot f_2$ bei x_0 differenzierbar ist und

$$\mathrm{D}_{x_0}(f_1 f_2) = f_2(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_1 + f_1(x_0)\mathrm{D}_{x_0} f_2$$

erfüllt.

(3) Verallgemeinern Sie (b) auf das Skalarprodukt $\langle f_1, f_2 \rangle$, wobei $m \geq 1$ wieder beliebig ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.
(2) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f nicht überall stetig sind.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.
(2) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 6. Lesen Sie Definition 10.65 und Proposition 10.66 im Skript, und beweisen Sie diese Proposition, indem Sie den in der Vorlesung gegebenen Beweis von Proposition 10.64 imitieren (vgl. Übung 10.67 im Skript).

Aufgabe 7. Sei $d \geq 1$.

(1) Zeigen Sie, dass $GL_d(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend und somit auch zusammenhängend ist. Verifizieren Sie auch, dass $GL_d(\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist.
(2) Zeigen Sie, dass $SO(d) := \{A \in SL_d(\mathbb{R}) \parallel A^T A = \mathrm{id}\}$ kompakt und zusammenhängend ist.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge und $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

W

(a) Ist f in einem Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig. ☐

(b) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, dann ist f in x_0 stetig. ☐

(c) Ist f auf ganz U differenzierbar, dann existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und diese sind stetig. ☐

(d) Ist f auf ganz U differenzierbar, dann existieren alle partiellen Ableitungen von f in x_0. ☐

(e) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $x_0 \in U$, so ist f in x_0 stetig. ☐

(2) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst diskret, falls es für jeden Punkt $x_0 \in A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

W

(f) Jede diskrete Teilmenge von X ist endlich. ☐

(g) Jede abgeschlossene diskrete Teilmenge von X ist endlich. ☐

(h) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig. ☐

(i) Jede gleichmässig stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig. ☐