Übungsserie 4

Abgabe bis zum 24. März

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Inversion an der Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, also die Abbildung

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung. Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix proportional zu einer orthogonalen Matrix ist. Was ist die geometrische Deutung?

Aufgabe 2.

(1) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) := xyz + 3e^x y$ im Punkt $(0,1,3) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$ zu $\alpha \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Extremum handelt und wenn ja, ob ein lokales Minimum oder Maximum angenommen wird.

(3) Bestimmen Sie die Taylor-Approximation 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. Seien $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, für den

$$f(x) = \|x - y_1\|^2 + \cdots + \|x - y_k\|^2$$

minimal wird und bestimmen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 4. Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Differential $\mathrm{D}_{(x,y)}(g \circ f)$ auf zwei Arten:

(1) indem Sie zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnen;
(2) unter Verwendung der Kettenregel.

Aufgabe 5. (**Zweite Version 30.03**) Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist, falls alle partielle Ableitungen bis zu und mit der zweiten Ordnung existieren (siehe Amann und Escher, Analysis II). Natürlich gilt, dass falls f zweimal stetig differenzierbar ist, dann ist f zweimal partiell differenzierbar. In der folgenden Übung zeigen wir, dass zweimal partiell differenzierbare Funktionen im Allgemeinen den Satz von Schwarz nicht erfüllen.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert für alle für $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, und dass $\partial_{xy} f(0,0) = -\partial_{yx} f(0,0) = 1$.

Beachte: Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbat ist, falls ∇f differenzierbar ist. Tatsächlich gilt der Satz von Schwarz auch für zweimal differenzierbare Funktionen (im Widerspruch zur vorherigen Version dieser ¨Ubung).

Aufgabe 6. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen, betrachtet als Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{inv}\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A \longmapsto A^{-1}$$

stetig ist.
(3) Zeigen Sie, dass inv differenzierbar ist und bestimmen Sie für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ das Differential $D_A\,\mathrm{inv}$.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Die Hesse-Matrix $H(x_0)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in einem kritischen Punkt x_0 von f positiv semidefinit, d.h. es gelte $\langle v, H(x_0)v\rangle \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise?

W

(a) x_0 ist ein striktes lokales Minimum von f. ☐
(b) x_0 ist ein (möglicherweise nicht striktes) lokales Minimum von f. ☐
(c) x_0 ist kein lokales Maximum von f. ☐
(d) Keine der obige Aussagen. ☐

(2) Welche der folgenden Aussagen über reguläre und kritische Werte bzw. Punkte gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Jeder Punkt im Urbild eines regulären Wertes ist ein regulärer Punkt.	☐
(f)	Das Bild eines kritischen Punktes ist ein kritischer Wert.	☐
(g)	Jeder Punkt im Urbild eines kritischen Wertes ist ein kritischer Punkt.	☐
(h)	Das Bild eines regulären Punktes ist ein regulärer Wert.	☐