Übungsserie 5

Abgabe bis zum 31. März

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Man zeige:

(1) (Schlaufencharakterisierung) f ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral von f entlang jeder stückweise stetig differenzierbaren Schlaufe verschwindet.

(2) Ist F ein Potential von f, so ist eine weitere Funktion $\tilde{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$ genau dann ein Potential von f, falls eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{F} = F + c$ existiert.

Aufgabe 2. Für welchen Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x e^y \\ (y + 1 + x^2)e^y \end{pmatrix}$$

für $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ konservativ? Bestimmen Sie für diesen Wert ein Potential von f.

Aufgabe 3. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zum ersten Mal zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

(1) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f : X \longrightarrow X$ ohne Fixpunkt;

(2) ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Funktion $f : X \longrightarrow X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}u$ und $\mathrm{D}_{(x_0,y_0,z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x, y, z)$ und $v = v(x, y, z)$.

Aufgabe 5. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1 - x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

Aufgabe 6. Es bezeichne $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die Matrixnorm (siehe Definition 10.62).

(1) Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(I_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_n$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge konvergiert (unter den getroffenen Annahmen).

(2) Zeigen Sie, dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

	W
(a) Ist U konvex, so ist U sternförmig.	☐
(b) Ist U sternförmig, so ist U konvex.	☐
(c) Ist U sternförmig, so ist U wegzusammenhängend.	☐
(d) Ist U wegzusammenhängend, so ist U sternförmig.	☐

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Bedingung, dass die Jacobi-Matrix von f drei Paare übereinstimmender Elemente hat, ist

	W
(e) hinreichend, aber nicht notwendig,	☐
(f) notwendig, aber nicht hinreichend,	☐
(g) notwendig und hinreichend,	☐
(h) weder notwendig noch hinreichend,	☐

damit f konservativ ist.