Übungsserie 6

Abgabe bis zum 05. April

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Verwenden Sie den Satz über lokale Invertierbarkeit (Satz 12.5), um den Satz über implizite Funktionen (Satz 12.2) zu beweisen.

Aufgabe 2. (Umkehrabbildung zu Kugelkoordinaten) Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ((-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

wie in Abschnitt 12.1.4. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von f.

Aufgabe 3. (Elliptische Kurven) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + a\}$. Für welche a ist M_a eine Teilmannigfaltigkeit?

Aufgabe 4. (Quadratische Hyperflächen) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, so dass die assoziierte quadratische Form $Q_A : x \longmapsto x^t A x$ nicht-degeneriert ist. Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_A(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ definiert.

Aufgabe 5. Seien $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ und $U \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, offene Teilmenge. Des Weiteren sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine *Immersion*, also eine glatte Abbildung, deren Differential $\mathrm{D}_x f$ in jedem Punkt $x \in U$ injektiv ist.

(1) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von x existiert, so dass $f(V)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(2) Sei f nun zusätzlich injektiv. Ist dann auch ganz $f(U)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6. (1) Zeigen Sie die folgende Umkehrung von Satz 12.16: Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $0 < k < n$, so gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine glatte Funktion $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ regulärer Wert von F ist und $U \cap M = F^{-1}\{0\}$ gilt.

(2) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) und zwei glatte Funktionen $F_1, F_2\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert sowohl von F_1 als auch von F_2. Finden Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Schnitt $N = M_1 \cap M_2$ der beiden $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten (*Hyperflächen*) $M_1 = F_1^{-1}\{0\}$ und $M_2 = F_2^{-1}\{0\}$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Seien $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) eine glatte Funktion, $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla F(x) \neq 0$ und $N := \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = F(x)\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

		W
(a)	N ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.	☐
(b)	Es gibt eine offene Umgebung $U\mathbb{R}^n$ von x, sodass $N \cap U$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.	☐
(c)	$\nabla F(x)$ steht senkrecht auf $\ker(D_x F)$.	☐
(d)	Ist $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f\|_N$ in $x \in N$ ein lokales Extremum annimmt, so ist $\nabla f(x) = \nabla F(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.	☐

(2) Welche der folgenden Aussagen über Teilmannigfaltigkeiten gelten im Allgemeinen?

		W
(e)	Die Vereinigung zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	☐
(f)	Sei M eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M$ offen in M. Dann ist N selbst eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.	☐
(g)	Das kartesische Produkt einer k-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und einer l-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist eine $(k+l)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$.	☐
(h)	Der Durchschnitt zweier Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ ist selbst eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.	☐

(3) Sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein *regulärer* glatter Weg, der zusätzlich $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Anders ausgedrückt ist γ also eine reguläre glatte Schlaufe, bei der sich Anfang und Ende auf glatte Weise zusammenfügen. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

W

(i) Für jedes $t \in (0,1)$ existiert ein offenes Teilintervall $J \subset (0,1)$ mit $t \in J$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. ☐

(j) Es existiert eine Teilmenge $J \subset [0,1]$ der Form $J = [0,a) \cup (b,1]$ für gewisse $a, b \in (0,1)$, so dass $\gamma(J)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. ☐

(k) Das Bild $\gamma([0,1])$ ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. ☐

(l) Ist γ zusätzlich *einfach* (vgl. Abschnitt 9.7.2), so ist das Bild $\gamma([0,1])$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. ☐