Übungsserie 7

Abgabe bis zum 20. April

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Gegeben sei die Schar der Ellipsoide

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = c,\, c > 0.$$

Welches dieser Ellipsoide berührt die Ebene $4x + 3y + 3z = 28$ tangential, und in welchem Punkt?

Aufgabe 2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf...

(a) ...dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(b) ...der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 3. Betrachte die Funktion $f\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x - y + 2z$ und die Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

(1) Bestimmen Sie die Extrema von f auf M.
(2) Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum von M bei alle Extrema von f auf M.

Aufgabe 4. Wir führen die folgende Definition ein (Def. 13.26 im Skript).
Definition *Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst Jordan-messbar, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die charakteristische Funktion von B auf Q Riemann-integrierbar ist. Das Volumen von B ist in diesem Fall durch*

$$\mathrm{vol}(B) := \int_Q \mathbb{1}_B \, d\mathrm{vol}$$

definiert.
Bemerkung: nach Korollar 13.27 im Skript ist $\mathrm{vol}(B)$ von der Wahl von Q unabhängig.

(1) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die Teilmenge $a + B$ Jordan-messbar ist mit Volumen

$$\mathrm{vol}(a + B) = \mathrm{vol}(B)$$

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge. Zeigen Sie: Ist K keine Nullmenge, so enthält die Differenzmenge $K - K = \{k_1 - k_2 \mid k_1, k_2 \in K\}$ eine Umgebung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5. (1) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass sich Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent auch mittels abgeschlossener Quader definieren lassen; also dass eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_l$ abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ existiert mit

$$N \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_l) < \epsilon.$$

(2) Folgern Sie, dass die Cantormenge $C \subseteq \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.82 im Skript) eine Nullmenge ist.

Aufgabe 6. Konstruieren Sie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$, für welche der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $N \subset U$ eine Nullmenge. In welchen der folgenden Fälle ist das Bild $f(N) \subset \mathbb{R}^m$ notwendigerweise eine Nullmenge?

	W
(a) Falls f gleichmässig stetig ist.	☐
(b) Falls f gleichmässig stetig ist und $m \geq n$.	☐
(c) Falls f lokal Lipschitz-stetig (vgl. Definition 11.16) ist.	☐
(d) Falls f lokal Lipschitz-stetig ist und $m \geq n$.	☐

(2) Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader mit nichtleerem Inneren und $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Welche der folgenden Aussagen über die (Sub-) Niveaumengen $N_{\leq a} = \{x \in Q \mid f(x) \leq a\}$ und $N_{=a} = \{x \in Q \mid f(x) = a\}$ von f gelten im Allgemeinen?

	W
(e) $N_{=a}$ ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge.	☐
(f) Ist $N_{=a}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar.	☐
(g) $N_{\leq a}$ ist für fast alle $a \in \mathbb{R}$ Jordan-messbar.	☐
(h) Ist $N_{\leq a}$ Jordan-messbar, so ist auch $N_{=a}$ Jordan-messbar.	☐