Übungsserie 8

Abgabe bis zum 27. April

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei Q ein abgeschlossener Quader und sei $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_Q f \mathrm{dvol} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ fast überall gilt. Formulieren und beweisen Sie die analoge Aussage für Funktionen auf Jordan-messbaren Teilmengen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\ dydx,$$
$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\ dxdy,$$

Sei

$$f\colon [0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} e^{y-x},\ x > y \geq 0 \\ -e^{x-y},\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ dxdy,$$
$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)\ \ dydx,$$

Aufgabe 3. Definition. *Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst eine Jordan-Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Liste $Q_1, \ldots, Q_L \subseteq \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass*

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{i=1}^L Q_i \text{ und } \sum_{i=1}^L vol(Q_i) < \varepsilon$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $\mathcal{J}$ ist eine Jordan-Nullmenge,

(2) $\mathcal{J}$ ist Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(\mathcal{J}) = 0$,

(3) $\overline{J}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

Aufgabe 4. Berechnen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten das Volumen des von den Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und $2z = x^2 + y^2$ eingeschlossenen Bereichs B.

Aufgabe 5. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\omega_n = \mathrm{vol}(B_1^{\mathbb{R}^n}(0))$ das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Hinweis: Finden Sie eine 2-Schritt-Rekursionsformel für ω_n.

Aufgabe 6. (Volumen des Standardsimplex) Sei $n \in \mathbb{N}$. In dieser Übung möchten wir das Volumen des n-dimensionalen Simplex

$$\triangle_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1\}$$

berechnen.

(1) Zeigen Sie, dass $\triangle_n$ das gleiche Volumen hat wie die Teilmenge

$$A_e = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq 1\}.$$

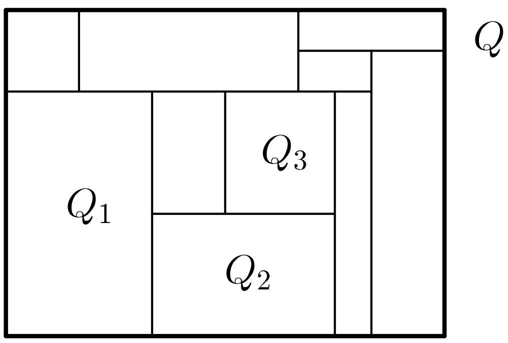
(2) Zu $\sigma \in S_n$ definieren wir

$$A_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq y_{\sigma(n)} \leq 1\}.$$

Verifizieren Sie, dass $\mathrm{vol}(A_\sigma) = \mathrm{vol}(A_e)$ gilt für alle $\sigma \in S_n$.

(3) Begründen Sie, wieso $[0,1]^n = \bigcup_{\sigma \in S_n} A_\sigma$ ist und verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass das Volumen von $\triangle_n$ gleich $\frac{1}{n!}$ ist.

Aufgabe 7. (Ganzzahlige Kantenlängen) Gegeben sei ein Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$, das eine endliche Überdeckung mit Rechtecken $Q_1, \dots, Q_n \subset Q$ besitzt, die sich jeweils höchstens an den Kanten schneiden.



Angenommen jedes der Rechtecke $Q_1, \dots, Q_n$ hat mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge. Zeigen Sie, dass dann auch Q mindestens eine Kante mit ganzzahliger Länge hat.

Hinweis: Finden Sie eine geeignete Funktion auf Q, dessen Integral genau dann verschwindet, wenn Q eine ganzzahlige Kante hat.

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}$ bezeichne $I = \int_B f \, d\,\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?

W

(a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dx\, dy$. ☐

(b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$. ☐

(c) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$. ☐

(d) $I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x,y) \in B : f(x,y) \geq t\})\, dt$. ☐

(2) Welche der folgenden Mengen ist Jordan-messbar?

W

(e) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. ☐

(f) $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. ☐

(g) $[0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \left[\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right]$. ☐

(h) $\bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{k \geq m} \bigcup_{l=1}^{2^{k-1}} \left[\frac{2l-1}{2^k}, \frac{2l}{2^k}\right]$. ☐

(3) Welches der folgenden Integrale unterscheidet sich von den anderen?

W

(i) $\int_{-1}^1 \int_{-1+|x|}^{1-|x|} dy\, dx$ ☐

(j) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dy\, dx$. ☐

(k) $4 \int_0^1 \int_0^{1-x} dy\, dx$. ☐

(l) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\, dx$. ☐