Übungsserie 9

Abgabe bis zum 04. Mai

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (1) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\Phi\colon \{(s,t) : s > 0,\, 0 < t < 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \longmapsto (as\cos(t), bs\sin(t))$$

in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$.

(2) Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment $J_0 = \int_B x^2 + y^2 \, d\,\mathrm{vol}(x,y)$ der Ellipse $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1\}$ mit Halbachsen $a, b > 0$.

Aufgabe 2. (Dreiecksungleichung für uneigentliche Integrale) Sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung einer Teilmenge B. Seien $f, g : B \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f| \le g$ gilt und die Funktionen $f|_{B_m}$ und $g|_{B_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar sind. Angenommen g ist uneigentlich Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann auch f und $|f|$ auf B uneigentlich Riemann-integrierbar sind und dass

$$\left|\int_B f \; d\,\mathrm{vol}\right| \le \int_B |f| \; d\,\mathrm{vol} \le \int_B g \; d\,\mathrm{vol}$$

gilt.

Aufgabe 3. Es sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \cosh(x)\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit $f_1(x,y) = 1$ und $f_2(x,y) = y\sinh(x)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n}\rangle \, dL$ von f durch den Rand ∂B von B auf zwei Arten:

(1) direkt anhand der Definition von Flussintegralen;
(2) unter Verwendung des Divergenzsatzes.

Aufgabe 4. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\mathrm{div}(A \circ f \circ A^{-1})(x) = \mathrm{div}(f)(A^{-1}x).$$

Bemerkung: Die Divergenz eines differenzierbaren n-dimensionalen Vektorfelds $g = (g_1, \dots, g_n)^t$ ist definiert als $\mathrm{div}(g) = \partial_1 g_1 + \cdots + \partial_n g_n$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie die Identität

$$\int_{[0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \,\mathrm{dvol}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Aufgabe 6. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \,\mathrm{dvol}(x) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n}\rangle \, dL$ das Flussintegral durch den Rand von $B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?
  (a) Ist f divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.
  (b) Ist f divergenzfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.
  (c) Ist f rotationsfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.
  (d) Ist $f = rot(g)$ für ein Vektorfeld g, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.

(2) Für $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}$ bezeichne $I = \int_B f \, d\,\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?
  (a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dx\, dy$
  (b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$.
  (c) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$.
  (d) $I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x,y) \in B : f(x,y) \geq t\})\, dt$.