Übungsserie 10

Abgabe bis zum 11. Mai

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Vektorfeld. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [0,1] \to \partial B$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes, so gilt

$$\int_B \det(D_x f)\, d\mathrm{vol}(x) = \int_0^1 (f_1 \circ \gamma)\,(f_2 \circ \gamma)' dt = -\int_0^1 (f_1 \circ \gamma)'(f_2 \circ \gamma)\, dt.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie den von der Kurve

$$\gamma\colon t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longmapsto (\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2$$

eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks $S \subset \mathbb{S}^2$ begrenzt durch die Längengrade $-\pi < \phi_1 < \phi_2 < \pi$ und Breitengrade $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

Aufgabe 4. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto g(\|x\|_2)\frac{x}{\|x\|_2}$$

divergenzfrei?

Aufgabe 5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein geschlossener, stetig differenzierbarer Weg und $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ ein Punkt ausserhalb der Spur $\gamma([a,b])$ von γ. Dann definieren wir die *Umlaufzahl von γ um u* durch

$$I_\gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\langle \gamma(t) - u, R^{-1}\dot\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t) - u\|_2^2}\, dt,$$

wobei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ die Rotationsmatrix um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet.

Wir betrachten nun speziell den Weg $\gamma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto r\left(\begin{smallmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{smallmatrix}\right)$ für ein $r > 0$, welcher den Rand des r-Balls $B_r(0)$ in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert. Zeigen Sie für $u \notin \partial B_r(0)$, dass

$$I_{\gamma_r}(u) = \begin{cases} 1, & u \in B_r(0), \\ 0, & u \notin \overline{B_r(0)}. \end{cases}$$

Aufgabe 6. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f \colon U \to \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, dL$ das Flussintegral durch den Rand von $B = B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen und sei $J_r := \int_{\partial B} \langle f, dx \rangle$ das Wegintegral entlang ∂B. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

W

- (a) Ist f divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.. ☐
- (b) Ist f divergenzfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab. ☐
- (c) Ist f rotationsfrei, so hängt der Wert J_r nicht von r ab. ☐
- (d) Ist f rotationsfrei, so ist $J_r = 0$ für alle $r > 0$. ☐

(2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $0 \in U$, $f \colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und

$$I_r = \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, dL$$

der Fluss von f durch den Rand des r-Balles $B_r(0)$. Welche der folgenden Asymptotiken gelten im Allgemeinen für $r \searrow 0$?

W

- (e) $I_r = \operatorname{div}(f)(0) + o(1)$. ☐
- (f) $I_r = o(r)$. ☐
- (g) $I_r = O(r^3)$. ☐
- (h) $I_r = O(r^2)$. ☐

(3) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B = [a, b] \times [c, d]$ und $f \colon U \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Sei $\mathbf{n}$ ein Aussennormalenfeld auf B und

$$I_u = \int_a^b \langle f, \mathbf{n} \rangle(x, c) \; dx, \quad I_o = \int_a^b \langle f, \mathbf{n} \rangle(x, d) \; dx$$

$$I_l = \int_c^d \langle f, \mathbf{n} \rangle(a, y) \; dy, \quad I_r \int_c^d \langle f, \mathbf{n} \rangle(b, y) \; dy$$

Welche der folgenden Audrücke stimmt mit dem Fluss von f durch ∂B?

W

- (i) $I_u - I_o + I_r - I_l$ ☐
- (j) $I_u + I_o + I_r + I_l$ ☐
- (k) $I_u + I_o - I_r - I_l$. ☐
- (l) $-I_u + I_o - I_r + I_l$. ☐