Übungsserie 11

Abgabe bis zum 18. Mai

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $(x, y, z) \longmapsto (x, y, z - x^2 - y^2)$ durch die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ von innen nach aussen.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld und sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Wir erinnern daran, dass wir mit $\nabla\varphi$ den Gradienten von φ bezeichnen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(1) $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$,
(2) $\operatorname{div}(\varphi f) = \langle \nabla\varphi, f\rangle + \varphi \operatorname{div} f$,
(3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$,
(4) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

Aufgabe 3. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene durch die Punkte $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$. Der Kreis $K \subseteq E$ durch diese drei Punkte sei so orientiert, dass e_1, e_2, e_3 in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Gegeben sei weiter das Vektorfeld $f\colon (x, y, z) \longmapsto (z - y, x + 2yz, y^2)$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(1) die Rotation von f und
(2) das Wegintegral von f entlang von K.

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $B \subseteq U$ ein glatt berandeter, kompakter und zusammenhängender Bereich mit äusserem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}\colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, und sei $u\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion mit *Aussennormalableitung* $\partial_{\mathbf{n}} u = \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle \colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_B \|\nabla u\|^2 \, d\operatorname{vol} = \int_{\partial B} u \partial_{\mathbf{n}} u \, dA$$

gilt und folgern Sie daraus, dass u auf B konstant sein muss, falls $u|_{\partial B} = 0$ oder $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ ist.

Aufgabe 5. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)^t.$$

Für welche Werte von α, β, γ ist f rotationsfrei? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von f.

Aufgabe 6. Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x,y,z) = \left(\frac{2(xz+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(yz-x)}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)^t$$

und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Wege

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)^t, \\ \gamma_2(t) &= (2\cos(t), 2\sin(t), 2)^t \\ \gamma_3(t) &= (3\cos(t)+6, 3\sin(t), 3)^t. \end{aligned}$$

(1) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ von f und das Wegintegral $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle$ von f entlang γ_1. Ist f konservativ?
(2) Erklären Sie, wie aus dem Satz von Stokes folgt, dass $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma_2} \langle f, dx \rangle$.
(3) Folgt aus dem Satz von Stokes auch, dass $\int_{\gamma_1} \langle f, dx \rangle = \int_{\gamma_3} \langle f, dx \rangle$?

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Sei $U \subseteq R^n$ ein sternförmiges (oder allgemeiner, einfach zusammenhängendes) Gebiet und $f\colon U \longrightarrow R^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Eigenschaften sind dann im Allgemeinen äquivalent zur Konservativität von f?

	W
(a) f besitzt ein Potential.	☐
(b) f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.	☐
(c) f ist divergenzfrei.	☐
(d) Falls $n = 3$ oder $n = 3$: f ist rotationsfrei.	☐

(2) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Welche der folgenden Wege $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bilden zusammen eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes von A?

	W
(e) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$.	☐
(f) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t))$	☐
(g) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), -2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$.	☐
(h) $\gamma_1(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$.	☐