Übungsserie 12

Abgabe bis zum 25. Mai

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. (1) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, und seien

$$\Phi \colon U \longrightarrow V \text{ und } \tilde{\Phi} \colon \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

zwei lokale Parametrisierungen, d.h. Diffeomorphismen offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(V \cap \mathbb{R}^k) = U \cap M$ und $\tilde{\Phi}(\tilde{V} \cap \mathbb{R}^k) = \tilde{U} \cap M$ (wobei $\mathbb{R}^k$ für $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ steht). Weiter sei $f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Zeigen Sie: Gibt es (in $\mathbb{R}^k$) Jordan-messbare Mengen $K \subset V \cap \mathbb{R}^k$ und $\tilde{K} \subset \tilde{V} \cap \mathbb{R}^k$ mit $\Phi(K) = \tilde{\Phi}(\tilde{K})$, so gilt

$$\int_K f \circ \Phi \sqrt{\operatorname{gram}_k(D\Phi)}\, d\operatorname{vol}_k = \int_{\tilde{K}} f \circ \tilde{\Phi} \sqrt{\operatorname{gram}_k(D\tilde{\Phi})}\, d\operatorname{vol}_k .$$

(2) Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen der Sphäre $M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ mittels einer Verallgemeinerung von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$ und sei f ein rotationsfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld auf Ω. Wir wollen folgendes zeigen:

$$\int_{\partial B_2(0)} \langle f, dx \rangle = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi \in C^2(\Omega) :\; f = \nabla \varphi$$

Zeigen Sie:

(1) Die Implikation $\Leftarrow$ gilt.
(2) Die Mengen $\Omega_\pm := \left\{(x,y) \in \Omega \;:\; \pm y < \frac{1}{2}\right\}$ sind einfach zusammenhängend.
(3) Es existieren C^2-Funktionen $\varphi_\pm$ auf $\Omega_\pm$ mit $\nabla \varphi_\pm = f|_{\Omega_\pm}$.
(4) Die Implikation $\Rightarrow$ gilt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie maximale Lösungen folgender Anfangswertproblemen:

(1)

$$\sqrt{1+x^2}\, y' = xy^3, \quad y(0) = -1$$

(2)

$$xy' = y^2, \quad y(1) = 2$$

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' + y'' - 2y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(1) drei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sowie
(2) die Lösung des Anfangswertproblems $y''' + y'' - 2y = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Aufgabe 5. (Lineare Unabhängigkeit) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ genau d (das heisst, paarweise verschiedene) komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die komplexwertigen Funktionen

$$f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha_k x} \in \mathbb{C}$$

für $k = 1, \dots, d$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind.

Aufgabe 6. Sei U ein sternförmiges Gebiet und seien $\gamma_0, \gamma_0 \colon [0,1] \longrightarrow U$ zwei Wege in U mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Finden Sie eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1.

Aufgabe 7. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

W

(a) $u'(t) = u(t) \cdot u(t)$. ☐
(b) $u''(t) - \sin(t)u(t) = \cos(u(t))$. ☐
(c) $u'''(t) = \log(t)u(t) + e^t u'(t) + t^2 u''(t)$. ☐
(d) $u(x) = e^{u'(t)}$. ☐

(2) Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ können als Lösungen einer homogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten auftreten?

W

(e) $x \longmapsto e^x(\cos(x) - \sin(x) - 1)$. ☐
(f) $x \longmapsto x^2 e^x$. ☐
(g) $x \longmapsto x\cos(x)$. ☐
(h) $x \longmapsto x\cosh(x)$ ☐