Übungsserie 13

Abgabe bis zum 1. Juni

Bonuspunkte können in Aufgaben 1-4 erarbeitet werden

Aufgabe 1. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 2 (Produktregel für matrixwertige Funktionen)**.** Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. Seien $a < b$ reelle Zahlen und seien $t \in [a,b] \longmapsto A(t) \in \mathrm{Mat}_{\ell,m}(\mathbb{R})$ und $t \in [a,b] \longmapsto B(t) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auch $t \in [a,b] \longmapsto A(t)B(t)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\tfrac{d}{dt}\big(A(t)B(t)\big) = \big(\tfrac{d}{dt}A(t)\big)B(t) + A(t)\big(\tfrac{d}{dt}B(t)\big)$$

für alle $t \in [a,b]$.

Aufgabe 3. In dieser Übung möchten wir die Exponentialabbildung weiter erkundschaften.

(1) Berechnen Sie zu $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ die Diagonalmatrix

$$\exp\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie die Differentialgleichung in dem Fall

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} x$$

und das zugehörige Vektorfeld.

(2) Berechnen Sie $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und interpretieren Sie wie zuvor die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

und das zugehörige Vektorfeld.

(3) Sei $\mathcal{J}$ die $d \times d$-Matrix, die über der Diagonalen Einsen und sonst nur Nullen stehen hat. Zeigen Sie, dass

$$\exp(t\mathcal{J}) = I_d + t\mathcal{J} + \tfrac{t^2}{2}\mathcal{J}^2 + \ldots + \tfrac{t^{d-1}}{(d-1)!}\mathcal{J}^{d-1}$$

und kommentieren Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = \mathcal{J}x$.

Aufgabe 4. (1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = \sin(x).$$

(2) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

(3) Finden Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4, \quad y(1) = 1$$

Aufgabe 5. Wir nehmen hier, nebst den Annahmen in des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf, an, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ autonom und in einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $0 \in \mathbb{R}^2$ definiert ist. Des Weiteren setzen wir voraus, dass $f(0) = 0$ ist. Das heisst, dass die konstante Funktion $t \in \mathbb{R} \longmapsto x(t) = 0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ löst. Wir wollen das Verhalten von Lösungen zu einem Anfangswert nahe bei der 0 in verschiedenen Situationen untersuchen.
Angenommen

$$f(x) = Ax + o(\|x\|) \quad \text{für } x \longrightarrow 0$$

für $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Sei $x : I \to \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung.

(1) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt, d.h. eine Umgebung von U von Null, so dass folgendes gilt: wenn $x(t_0) \in U$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = 0$.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $H(x) = \|x\|^2$.

Aufgabe 6. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (Sie müssen Spezialfälle, die durch das Verschwinden von gewissen Ausdrücken im Lösungsverfahren entstehen, nicht weiter untersuchen):

(1) $(x^2 - x)y' = y^2 + y$,
(2) $y' + e^y = 1$,
(3) $xy' = 1 - y^2$,

(4) $y'x^2 = y^2 + yx + x^2$.

Aufgabe 7. Finden Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche Aussage in Übung 8.(3).

Aufgabe 8. Multiple choice Aufgabe. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es kann mehr als eine richtige Antwort geben).

(1) Für welche der folgenden Differentialgleichungen bildet die Menge aller Lösungen einen Vektorraum?

	W
(a) $y' - 2y = 0$.	☐
(b) $x(y')^2 - 2y = 0$.	☐
(c) $y' - x\sqrt{\lvert y\rvert} = 0$.	☐
(d) $y' - y = 1$.	☐
(e) $y' - x^2 y = 0$.	☐

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ treffen im Allgemeinen zu?

	W
(f) Jede Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{t\longrightarrow\infty} \lVert x(t)\rVert_2 = \infty$ wächst für $t \longrightarrow \infty$ exponentiell.	☐
(g) Genau dann existiert eine nichttriviale konstante Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, wenn A nichttrivialen Kern besitzt.	☐
(h) Ist A reell diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.	☐
(i) Ist A komplex diagonalisierbar und existiert eine nichttriviale beschränkte Lösung $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, so ist 0 ein Eigenwert von A.	☐

(3) Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig im Ort und $(t_0, x_0) \in U$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0,$$

aufgrund des Satzes von Picard–Lindelöf eine maximale Lösung $x\colon I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit Graph in U. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für die Picard-Iteration zu diesem Anfangswertproblem?

	W
(j) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass die Picard-Iteration auf $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gleichmässig gegen $x\vert_I$ konvergiert.	☐
(k) Die Picard-Iteration konvergiert auf $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x\vert_{I_{\max}}$.	☐
(l) Die Picard-Iteration konvergiert auf jedem kompakten Teilintervall K von $I_{\max}$ gleichmässig gegen $x\vert_K$.	☐