Probeprüfung Analysis II (17. August 2022, überarbeitet)

Rechnungen

Aufgabe 1. [**4 Punkte**] Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Für welches Paar $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ wird das Integral $\int_B (x-s)^2 + (y-t)^2 \, d\,\mathrm{vol}(x, y)$ minimal?

Aufgabe 2. [**4 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - x^2 - y^2)$ durch die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ von innen nach aussen.

Aufgabe 3. Gegeben sei das ebene Dreieck $D \subset \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ und $C = (0, 0, 3)$. Berechnen Sie

(a) [**1 Punkt**] die Rotation des Vektorfelds $f\colon (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ sowie

(b) [**3 Punkte**] das Wegintegral von f entlang des Randes von D, sodass die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge durchlaufen werden.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(a) [**1 Punkt**] die allgemeine Lösung dieser Gleichung sowie

(b) [**3 Punkte**] die Lösung des Anfangwertproblems $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

MC-Aufgaben

Aufgabe 5. [**3 Punkte**] Sei ∇f das Gradientenvektorfeld einer glatten Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Ist $\nabla f(x_0) \neq 0$ für eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0, sodass $\{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Es gibt keine reguläre glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$, sodass $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

(c) Ist $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f unbeschränkt.

(d) Ist $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter glatt berandeter Bereich mit äusserem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}$, und gilt $\langle \nabla f(x), \mathbf{n}(x) \rangle > 0$ für alle $x \in \partial B$, so besitzt f im Innern von B eine lokale Minimalstelle.

Aufgabe 6. [3 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Differential in jedem Punkt invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist das Urbild $f^{-1}\{y\}$ endlich oder abzählbar.

(b) f bildet Nullmengen auf Nullmengen ab.

(c) Ist f injektiv, so ist $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

(d) Ist f surjektiv, so ist $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 7. [3 Punkte] Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)$ ein C^1-Vektorfeld auf $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$, und für $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}$ sei $\gamma_{r,z}\colon [0, 2\pi] \to U$ durch $\gamma_{r,z}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), z)$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ für alle $j, k \in \{1,2,3\}$, so ist f konservativ.

(b) Ist f divergenzfrei, so hängt das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ nicht von der Wahl von r und z ab.

(c) Ist f rotationsfrei, so hängt das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ nicht von der Wahl von r und z ab.

(d) Ist das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ für jedes $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}$ gleich null, so ist f konservativ.

Aufgabe 8. [3 Punkte] Für $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ bezeichne $I = \int_B f \, d\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?

(a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dx\,dy$

(b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$.

(c) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$.

(d) $I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x,y) \in B : f(x,y) \geq t\})\,dt$.

Theorie und Anwendungen

Aufgabe 9.

(a) [**2 Punkte**] Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) [**4 Punkte**] Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 10.

(a) [**2 Punkte**] Wann heisst eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $m, n \geq 1$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar?

(b) [**4 Punkte**] Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, so ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Aufgabe 11. [**4 Punkte**] Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Vektorfeld. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [0,1] \to \partial B$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes, so gilt

$$\int_B \det(D_x f)\,d\,\mathrm{vol}(x) = \int_0^1 (f_1 \circ \gamma)\,(f_2 \circ \gamma)' dt = -\int_0^1 (f_1 \circ \gamma)'(f_2 \circ \gamma)\,dt.$$

Aufgabe 12. Es seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) [**3 Punkte**] Zeigen Sie: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab \quad \text{(Young-Ungleichung)}.$$

(b) **[3 Punkte]** Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$. Folgern Sie aus (a): Für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \quad \text{(Hölder-Ungleichung).}$$

Hinweis: Nehmen Sie zuerst $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ *an. Sie können Teil (b) auch beantworten, wenn Sie (a) nicht gelöst haben.*