Probeprüfung Analysis II – Lösung (17. August 2022, überarbeitet)

Rechnungen

Aufgabe 1. [**4 Punkte**] Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Für welches Paar $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ wird das Integral $\int_B (x-s)^2 + (y-t)^2 \, d\operatorname{vol}(x, y)$ minimal?

Lösung: Man differenziert unter das Integral und erhält die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_B (x-s)^2 + (y-t)^2 \, d\operatorname{vol}(x, y) = \int_B -2(x-s) \, d\operatorname{vol}(x, y) = 0.$$

Daraus folgt leicht $s\pi/4 = \int_B s \, d\operatorname{vol} = \int_B x \, d\operatorname{vol} = 1/3$, also $s = 4/(3\pi)$. Aus Symmetriegründen ist $t = s$.

Aufgabe 2. [**4 Punkte**] Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - x^2 - y^2)$ durch die obere Halbsphäre $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ von innen nach aussen.

Lösung: Die Divergenz des Vektorfelds ist konstant gleich 3, und das Volumen der Halbkugel ist $2\pi/3$, somit ist nach dem Divergenzsatz der Fluss durch die Oberfläche der Halbkugel gleich 2π. Davon ist noch der Fluss durch die Grundfläche G zu subtrahieren:

$$\int_G x^2 + y^2 \, d\operatorname{vol}(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \, d\phi \, dr = \frac{\pi}{2},$$

der Fluss durch S ist also $2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$.

Aufgabe 3. Gegeben sei das ebene Dreieck $D \subset \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ und $C = (0, 0, 3)$. Berechnen Sie

(a) [**1 Punkt**] die Rotation des Vektorfelds $f\colon (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ sowie

(b) [**3 Punkte**] das Wegintegral von f entlang des Randes von D, sodass die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge durchlaufen werden.

Lösung: Man verwendet den Satz von Stokes. Die Rotation des Vektorfelds ist $(1, 1, 1)$, der Normalenvektor der Dreiecksebene $(1/\sqrt{22})(3, 3, 2)$, das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren somit $8/\sqrt{22}$. Multiplikation mit dem Flächeninhalt $A = \sqrt{22}$ des Dreiecks gibt den Wert 8 für das Wegintegral.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(a) [**1 Punkt**] die allgemeine Lösung dieser Gleichung sowie

(b) [**3 Punkte**] die Lösung des Anfangwertproblems $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Lösung: Die homogene Gleichung hat das charakteristische Polynom $(\lambda+2)^2$ und somit die allgemeine Lösung $y_0(x) = (a + bx)\,\mathrm{e}^{-2x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Für das Anfangswertproblem in (b) genügt deshalb der Ansatz $y(x) = cx^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= (2cx - 2cx^2)\,\mathrm{e}^{-2x}, \\ y''(x) &= (2c - 8cx + 4cx^2)\,\mathrm{e}^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung gibt $c = 1$.

MC-Aufgaben

Aufgabe 5. [**3 Punkte**] Sei ∇f das Gradientenvektorfeld einer glatten Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Ist $\nabla f(x_0) \neq 0$ für eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0, sodass $\{x \in U : f(x) = f(x_0)\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Es gibt keine reguläre glatte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$, sodass $\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

(c) Ist $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f unbeschränkt.

(d) Ist $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter glatt berandeter Bereich mit äusserem Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}$, und gilt $\langle \nabla f(x), \mathbf{n}(x) \rangle > 0$ für alle $x \in \partial B$, so besitzt f im Innern von B eine lokale Minimalstelle.

Lösung: (a) W, (b) W, (c) F, (d) W.

Aufgabe 6. [**3 Punkte**] Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Differential in jedem Punkt invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ist das Urbild $f^{-1}\{y\}$ endlich oder abzählbar.

(b) f bildet Nullmengen auf Nullmengen ab.

(c) Ist f injektiv, so ist $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus.

(d) Ist f surjektiv, so ist $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Lösung: (a) W, (b) W, (c) W, (d) F.

Aufgabe 7. [3 Punkte] Es sei $f = (f_1, f_2, f_3)$ ein C^1-Vektorfeld auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 0\}$, und für $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}$ sei $\gamma_{r,z}\colon [0, 2\pi] \to U$ durch $\gamma_{r,z}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), z)$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Erfüllt f die Integrabilitätsbedingungen $\partial_j f_k = \partial_k f_j$ für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$, so ist f konservativ.

(b) Ist f divergenzfrei, so hängt das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ nicht von der Wahl von r und z ab.

(c) Ist f rotationsfrei, so hängt das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ nicht von der Wahl von r und z ab.

(d) Ist das Wegintegral von f entlang $\gamma_{r,z}$ für jedes $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}$ gleich null, so ist f konservativ.

Lösung: (a) F, (b) F, (c) W, (d) F.

Aufgabe 8. [3 Punkte] Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq 1\}$ bezeichne $I = \int_B f \, d\mathrm{vol}$ das Integral einer nicht-negativen Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der folgenden Gleichungen gelten?

(a) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\, dx\, dy$

(b) $I = \int_{x^2}^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$.

(c) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$.

(d) $I = \int_0^\infty \mathrm{vol}(\{(x, y) \in B : f(x, y) \geq t\})\, dt$.

Lösung: (a) F, (b) F, (c) W, (d) W.

Theorie und Anwendungen

Aufgabe 9.

(a) [**2 Punkte**] Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(b) [**4 Punkte**] Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Lösung: (a) Ist (X, d) ein nicht leerer, vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \to X$ eine Lipschitz-Kontraktion, d.h. eine Abbildung mit $d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$ für eine Konstante $\lambda \in [0, 1)$ und für alle $x, y \in X$, so existiert genau ein Punkt $x_0 \in X$ mit $T(x_0) = x_0$ (ein Fixpunkt von T).

(b) Man wählt eine beliebigen Startpunkt $x_1 \in X$ und definiert die Folge $(x_n)_n$ rekursiv durch $x_{n+1} = T(x_n)$ oder direkt durch $x_n = T^{n-1}(x_1)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T^{n-1}(x_1), T^{n-1}(x_2)) \leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_2).$$

Für $1 \leq m < n$ folgt damit

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{m-1} + \ldots + \lambda^{n-2})\, d(x_1, x_2) \\ &\leq \lambda^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k\, d(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Zu $\epsilon > 0$ existiert daher ein $N \geq 0$ mit $d(x_m, x_n) < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$. Somit ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge, die aufgrund der Vollständigkeit von X gegen einen Punkt $x_0 \in X$ konvergiert. Da T stetig ist, folgt

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = T(x_0),$$

x_0 ist also ein Fixpunkt von T. Für jeden von x_0 verschiedenen Punkt $x \in X$ gilt $d(x_0, T(x)) = d(T(x_0), T(x)) \leq \lambda\, d(x_0, x) < d(x_0, x)$, womit $T(x) \neq x$ ist. Dies zeigt, dass x_0 der einzige Fixpunkt von T ist.

Aufgabe 10.

(a) [**2 Punkte**] Wann heisst eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für $m, n \geq 1$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar?

(b) [**4 Punkte**] Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, so ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Lösung: (a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (das Differential $L = D_{x_0}f$) gibt, sodass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|) \quad \text{für } h \to 0$$

oder anders ausgedrückt $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\| = 0$ gilt.

(b) Seien $x = (x_1, x_2)$ und $h = (h_1, h_2) \neq (0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Aufgrund der partiellen Differenzierbarkeit von f und des Mittelwertsatzes der eindimensionalen Differentialrechnung gilt

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x)\\
&\quad = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)\\
&\quad = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)\\
&\quad = \partial_1 f(\xi_1, x_2 + h_2)\, h_1 + \partial_2 f(x_1, \xi_2)\, h_2
\end{aligned}$$

für Zwischenpunkte $\xi_k \in [\min\{x_k, x_k+h_k\}, \max\{x_k, x_k+h_k\}]$, $k = 1, 2$. Damit ist

$$f(x+h) - f(x) = \partial_1 f(x)\, h_1 + \partial_2 f(x)\, h_2 + \alpha(x, h)$$

für $\alpha(x,h) = [\partial_1 f(\xi_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2)]\, h_1 + [\partial_2 f(x_1, \xi_2) - \partial_2 f(x_1, x_2)]\, h_2$. Für $h \to 0$ folgt $h_k \to 0$ und $\xi_k \to x_k$, und mit $|h_k|/\|h\| \leq 1$ und der Stetigkeit von $\partial_k f$ folgt $\alpha(x,h)/\|h\| \to 0$. Somit ist f bei x differenzierbar mit Differential $L(h) = \partial_1 f(x)\, h_1 + \partial_2 f(x)\, h_2$.

Aufgabe 11. [4 Punkte] Sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Vektorfeld. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^2$ ein kompakter glatt berandeter Bereich und $\gamma\colon [0,1] \to \partial B$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes, so gilt

$$\int_B \det(D_x f)\, d\operatorname{vol}(x) = \int_0^1 (f_1 \circ \gamma)\, (f_2 \circ \gamma)' dt = -\int_0^1 (f_1 \circ \gamma)'(f_2 \circ \gamma)\, dt.$$

Lösung: Die zweite Gleichung ergibt sich direkt durch partielle Integration. Für den Integranden des zweiten Integrals folgt mit der Kettenregel

$$(f_1 \circ \gamma)\, (f_2 \circ \gamma)' = (f_1 \circ \gamma)\, \langle (\nabla f_2) \circ \gamma, \gamma' \rangle = \langle (f_1 \nabla f_2) \circ \gamma, \gamma' \rangle,$$

somit ist das zweite Integral gerade das Wegintegral des Vektorfeldes $f_1 \nabla f_2 = (f_1\, \partial_1 f_2, f_1\, \partial_2 f_2)$ entlang γ. Die Rotation dieses Vektorfeldes ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f_1 \nabla f_2) &= \partial_1 (f_1\, \partial_2 f_2) - \partial_2 (f_1\, \partial_1 f_2)\\
&= \partial_1 f_1\, \partial_2 f_2 + f_1\, \partial_1 \partial_2 f_2 - \partial_2 f_1\, \partial_1 f_2 - f_1\, \partial_2 \partial_1 f_2\\
&= \det(D.f),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt nach dem Satz von Schwarz $\partial_1\partial_2 f_2 = \partial_2\partial_1 f_2$ gilt (f ist C^2). Die erste Gleichung folgt somit aus dem Satz von Green.

Alternativ kann man das zweite Integral als Flussintegral des um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedrehten Vektorfeldes $(f_1\,\partial_2 f_2, -f_1\,\partial_1 f_2)$ durch ∂B auffassen. Die gleiche Rechnung wie oben zeigt, dass die Divergenz dieses Vektorfeldes gleich $\det(D.f)$ ist, womit die erste Gleichung aus dem Divergenzsatz folgt.

Aufgabe 12. Es seien $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) [**3 Punkte**] Zeigen Sie: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab \quad \text{(Young-Ungleichung).}$$

(b) [**3 Punkte**] Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$. Folgern Sie aus (a): Für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \quad \text{(Hölder-Ungleichung).}$$

Hinweis: Nehmen Sie zuerst $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ an. Sie können Teil (b) auch beantworten, wenn Sie (a) nicht gelöst haben.

Lösung: (a) Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so gilt die Ungleichung trivialerweise. Seien jetzt $a, b > 0$. Dann existieren $s, t \in \mathbb{R}$ mit $e^s = a^p$ und $e^t = a^q$. Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, folgt die gewünschte Ungleichung aus der Konvexität der Exponentialfunktion:

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q = \frac{1}{p}e^s + \frac{1}{q}e^t \geq e^{\frac{1}{p}s + \frac{1}{q}t} = (a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}} = ab.$$

Ein anderer Lösungsweg wurde in der Vorlesung im FS 2022 als einfaches Beispiel zur Methode von Lagrange gegeben. Zuerst zeigt man die Ungleichung $f(x,y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq 1$ für $x, y > 0$ unter der Nebenbedingung $F(x,y) = xy - 1 = 0$. In lokalen Extremalstellen von f unter dieser Nebenbedingung gilt

$$\begin{pmatrix} x^{p-1} \\ y^{q-1} \end{pmatrix} = \nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, also $x^p = \lambda xy = y^q$ und $y = x^{q/p}$. Mit $xy = 1$ folgt weiter $x^{1+q/p} = 1$ und somit $(x,y) = (1,1)$. In diesem Punkt ist $f(1,1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Da $f(x,y) > 1$ für $x \geq p$ oder $y \geq q$, muss $(x,y) = (1,1)$ eine (globale) Minimalstelle und 1 das Minimum sein, was die gewünschte Ungleichung für x, y beweist. Mit $x = a/(ab)^{1/p}$ und $y = b/(ab)^{1/q}$ folgt daraus die Young-Ungleichung für $a, b > 0$.

(b) Im Fall $\|x\|_p = 0$ oder $\|y\|_q = 0$ gilt die Ungleichung offensichtlich. Seien jetzt zunächst $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Für $a = |x_k|$ und $b = |y_k|$ folgt aus (a)

$$|x_k y_k| \leq \frac{1}{p}|x_k|^p + \frac{1}{q}|y_k|^q,$$

und Summation über k gibt wie gewünscht

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die allgemeine Ungleichung für $\|x\|_p > 0$ und $\|y\|_q > 0$ folgt unmittelbar, indem man die soeben gezeigte Ungleichung auf die normierten Vektoren $x' = x/\|x\|_p$ und $y' = y/\|y\|_q$ anwendet (es gilt $|x'_k y'_k| = |x_k y_k|/(\|x\|_p \|y\|_q)$).
