**Probeprüfung Analysis II** (31. Januar 2023)

## Rechnungen

---

**Aufgabe 1.**

(a) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\Phi\colon \{(s,t) : s > 0,\, 0 < t < 2\pi\} \to \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \mapsto (as\cos(t), bs\sin(t))$$

in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$.

(b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment $J_0 = \int_B x^2 + y^2 \, d\,\mathrm{vol}(x,y)$ der Ellipse $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ mit Halbachsen $a, b > 0$.

---

**Aufgabe 2. [3 Punkte]**
Berechnen Sie das Integral $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\, dy\, dx$.

---

**Aufgabe 3.** Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene durch die Punkte $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$. Der Kreis $K \subseteq E$ durch diese drei Punkte sei so orientiert, dass $e_1, e_2, e_3$ in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Gegeben sei weiter das Vektorfeld $f\colon (x,y,z) \mapsto (z-y, x+2yz, y^2)$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(a) [**1 Punkt**] die Rotation von $f$ und

(b) [**3 Punkte**] das Wegintegral von $f$ entlang von $K$.

---

**Aufgabe 4.** Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' + y'' - 2y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(a) [**2 Punkte**] drei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sowie

(b) [**3 Punkte**] die Lösung des Anfangswertproblems $y''' + y'' - 2y = \mathrm{e}^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

---

## MC-Aufgaben

**Aufgabe 5. [3 Punkte]** Sei $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst *diskret*, falls es für jeden Punkt $x_0 \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B_\epsilon(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Jede diskrete Teilmenge von $X$ ist endlich.

(b) Jede abgeschlossene diskrete Teilmenge von $X$ ist endlich.

(c) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

(d) Jede gleichmässig stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

---

**Aufgabe 6. [3 Punkte]** Für $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, dA$ das Flussintegral durch den Rand von $B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Ist $f$ divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.

(b) Ist $f$ divergenzfrei, so hängt der Wert $I_r$ nicht von $r$ ab.

(c) Ist $f$ rotationsfrei, so hängt der Wert $I_r$ nicht von $r$ ab.

(d) Ist $f = \mathrm{rot}(g)$ für ein Vektorfeld $g$, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.

---

**Aufgabe 7. [3 Punkte]** Seien $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ eine glatte Funktion, $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla F(x) \neq 0$ und $N := \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = F(x)\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) $N$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(b) Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x$, sodass $N \cap U$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) $\nabla F(x)$ steht senkrecht auf $\ker(D_x F)$.

(d) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_N$ in $x \in N$ ein lokales Extremum annimmt, so ist $\nabla f(x) = \lambda \nabla F(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 8.** [**3 Punkte**] Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können als Lösungen einer homogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten auftreten?

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x) - 1)$

(b) $x \mapsto x^2\,\mathrm{e}^x$

(c) $x \mapsto x\cos(x)$

(d) $x \mapsto x\cosh(x)$

## Theorie und Anwendungen

**Aufgabe 9.** Für einen metrischen Raum $X$ bezeichne $C_{\mathrm{b}}(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten, reellwertigen Funktionen auf $X$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_{\mathrm{b}}(X)$. Zeigen Sie in den folgenden zwei Schritten, dass die Folge in $C_{\mathrm{b}}(X)$ konvergiert (und $C_{\mathrm{b}}(X)$ somit vollständig ist):

(a) [**3 Punkte**] Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen eine beschränkte Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$.

(b) [**3 Punkte**] Die Funktion $f$ ist stetig.

**Aufgabe 10.**

(a) [**1 Punkt**] Wie sind (Lebesgue-)Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ definiert?

(b) [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

(c) [**3 Punkte**] Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_Q f\,d\,\mathrm{vol} = 0$. Zeigen Sie, dass fast überall $f = 0$ gilt.

**Aufgabe 11.** Für eine Jordan-messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Flächeninhalt $\mathrm{vol}(B) > 0$ sind

$$x_B = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B x \, d\,\mathrm{vol}(x,y), \quad y_B = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B y \, d\,\mathrm{vol}(x,y)$$

die Koordinaten des Flächenschwerpunkts $z_B = (x_B, y_B)$ von $B$. Zeigen Sie:

(a) **[2 Punkte]** Ist $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ für paarweise disjunkte Jordan-messbare Mengen $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{vol}(B_1), \ldots, \mathrm{vol}(B_n) > 0$, so gilt

$$z_B = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{vol}(B_i)}{\mathrm{vol}(B)} \, z_{B_i}.$$

(b) **[4 Punkte]** Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Eckpunkten $o = (0,0)$, $p = (r,0)$ und $q = (s,t)$, wobei $r, s, t > 0$, so ist $z_B = \frac{1}{3}(o + p + q)$.

---

**Aufgabe 12.** **[4 Punkte]** Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel $\mathrm{div}(A^{-1} \circ f \circ A)(x) = \mathrm{div}(f)(Ax)$. *Hinweis: Spur.*