Probeprüfung Analysis II – Lösung (31. Januar 2023)

Rechnungen

Aufgabe 1.

(a) [**1 Punkt**] Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante der Abbildung

$$\Phi\colon \{(s,t) : s > 0,\, 0 < t < 2\pi\} \to \mathbb{R}^2, \quad (s,t) \mapsto (as\cos(t), bs\sin(t))$$

in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$.

(b) [**3 Punkte**] Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment $J_0 = \int_B x^2 + y^2 \, d\,\mathrm{vol}(x,y)$ der Ellipse $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ mit Halbachsen $a, b > 0$.

Lösung: (a) $\det(D_{(s,t)}\Phi) = abs$.
(b) Mit der mehrdimensionalen Substitutionsregel und (a) folgt

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \big(a^2 s^2 \cos^2(t) + b^2 s^2 \sin^2(t)\big)\, abs \, dt\, ds \\ &= \int_0^1 \pi ab\,(a^2+b^2)\, s^3\, ds = \frac{\pi}{4} ab(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. [**3 Punkte**]
Berechnen Sie das Integral $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\, dy\, dx$.

Lösung: $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^y \sin(y^2)\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y \sin(y^2)\, dy = [-\frac{1}{2}\cos(y^2)]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$

Aufgabe 3. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene durch die Punkte $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$. Der Kreis $K \subseteq E$ durch diese drei Punkte sei so orientiert, dass e_1, e_2, e_3 in dieser Reihenfolge durchlaufen werden. Gegeben sei weiter das Vektorfeld $f\colon (x,y,z) \mapsto (z-y, x+2yz, y^2)$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie

(a) [**1 Punkt**] die Rotation von f und

(b) [**3 Punkte**] das Wegintegral von f entlang von K.

Lösung: (a) $\operatorname{rot}(f) = (0, 1, 2)$.
(b) Der Normalenvektor von E ist $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$, und das Skalarprodukt $\operatorname{rot}(f) \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}$ ist konstant. Mit dem Satz von Stokes erhält man für das Wegintegral deshalb $\sqrt{3}A$, wobei A der Flächeninhalt des Kreises ist. Da der Radius $\sqrt{2/3}$ beträgt, ist $A = 2\pi/3$ und das Wegintegral gleich $2\pi/\sqrt{3}$.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung $y''' + y'' - 2y = 0$ für eine reelle Funktion $y = y(x)$. Bestimmen Sie

(a) [**2 Punkte**] drei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sowie

(b) [**3 Punkte**] die Lösung des Anfangswertproblems $y''' + y'' - 2y = \mathrm{e}^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Lösung: (a) e^{x}, $\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$, $\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.
(b) Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung verwendet man den Ansatz $y = c\,\mathrm{e}^{-x}$ und erhält $y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$. Die allgemeine Lösung und ihre ersten zwei Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
y &= A\,\mathrm{e}^{x} + \big(B\cos(x) + C\sin(x) - \tfrac{1}{2}\big)\,\mathrm{e}^{-x},\\
y' &= A\,\mathrm{e}^{x} + \big((C - B)\cos(x) - (B + C)\sin(x) + \tfrac{1}{2}\big)\,\mathrm{e}^{-x},\\
y'' &= A\,\mathrm{e}^{x} + \big(2B\sin(x) - 2C\cos(x) - \tfrac{1}{2}\big)\,\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Die gegebene Anfangsbedingung führt somit auf das Gleichungssystem

$$A + B - \tfrac{1}{2} = 0, \quad A + C - B + \tfrac{1}{2} = 1, \quad A - 2C - \tfrac{1}{2} = 0$$

mit der Lösung $A = \frac{1}{2}$, $B = C = 0$. Das Anfangswertproblem hat also die Lösung $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh(x)$, wie man leicht durch Einsetzen verifiziert.

MC-Aufgaben

Aufgabe 5. [**3 Punkte**] Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst *diskret*, falls es für jeden Punkt $x_0 \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B_\epsilon(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Jede diskrete Teilmenge von X ist endlich.

(b) Jede abgeschlossene diskrete Teilmenge von X ist endlich.

(c) Jede lokal Lipschitz-stetige Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

(d) Jede gleichmässig stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

Lösung: (a) F, (b) W, (c) W, (d) F.

Aufgabe 6. [3 Punkte] Für $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ sei $I_r := \int_{\partial B_r(0)} \langle f, \mathbf{n} \rangle \, dA$ das Flussintegral durch den Rand von $B_r(0)$ bezüglich der Aussennormalen. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) Ist f divergenzfrei, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.

(b) Ist f divergenzfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.

(c) Ist f rotationsfrei, so hängt der Wert I_r nicht von r ab.

(d) Ist $f = \operatorname{rot}(g)$ für ein Vektorfeld g, so ist $I_r = 0$ für alle $r > 0$.

Lösung: (a) F, (b) W, (c) F, (d) W.

Aufgabe 7. [3 Punkte] Seien $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) eine glatte Funktion, $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\nabla F(x) \neq 0$ und $N := \{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = F(x)\}$. Welche der folgenden Aussagen sind stets wahr?

(a) N ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(b) Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x, sodass $N \cap U$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) $\nabla F(x)$ steht senkrecht auf $\ker(D_x F)$.

(d) Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die $f|_N$ in $x \in N$ ein lokales Extremum annimmt, so ist $\nabla f(x) = \lambda \, \nabla F(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lösung: (a) F, (b) W, (c) W, (d) W.

Aufgabe 8. [3 Punkte] Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können als Lösungen einer homogenen, linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten auftreten?

(a) $x \mapsto \mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x) - 1)$

(b) $x \mapsto x^2 \, \mathrm{e}^x$

(c) $x \mapsto x \cos(x)$

(d) $x \mapsto x \cosh(x)$

Lösung: (a) W, (b) W, (c) F, (d) F.

Theorie und Anwendungen

Aufgabe 9. Für einen metrischen Raum X bezeichne $C_{\mathrm{b}}(X)$ den Vektorraum der stetigen, beschränkten, reellwertigen Funktionen auf X, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C_{\mathrm{b}}(X)$. Zeigen Sie in den folgenden zwei Schritten, dass die Folge in $C_{\mathrm{b}}(X)$ konvergiert (und $C_{\mathrm{b}}(X)$ somit vollständig ist):

(a) [**3 Punkte**] Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen eine beschränkte Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$.

(b) [**3 Punkte**] Die Funktion f ist stetig.

Lösung: (a) Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in X$ und $m, n \geq N$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y\in X} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Insbesondere ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, die aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ einen Grenzwert $f(x) \in \mathbb{R}$ besitzt. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert demnach punktweise gegen die so definierte Funktion f. Mit $m \to \infty$ folgt aus der obigen Ungleichung weiter $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$ und $n \geq N$, also $\|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $\|f\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty < \infty$ ist f beschränkt.

(b) Sei wie oben $\|f_N - f\|_\infty \leq \epsilon$, und sei $x_0 \in X$. Da f_N bei x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$. Es folgt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon.$$

Dies zeigt, dass f bei x_0 stetig ist (vgl. Satz 7.48 und Proposition 10.73 im Skript).

Aufgabe 10.

(a) [**1 Punkt**] Wie sind (Lebesgue-)Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ definiert?

(b) [**2 Punkte**] Zeigen Sie, dass die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

(c) [**3 Punkte**] Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f \geq 0$ und $\int_Q f \, d\mathrm{vol} = 0$. Zeigen Sie, dass fast überall $f = 0$ gilt.

Lösung: (a) Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine *Nullmenge*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Folge $(Q_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von offenen (äquivalent: abgeschlossenen) Quadern in $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass $N \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_l) < \epsilon$ gilt.

(b) Seien $N_1, N_2, \ldots$ Nullmengen, $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für jedes k eine Folge offener Quader $Q_{k,1}, Q_{k,2}, \ldots$ mit $N_k \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_{k,l}$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_{k,l}) < \epsilon/2^k$. Somit ist $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_{k,l}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_{k,l}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist und $\epsilon > 0$ beliebig war, ist N eine Nullmenge.

(c) Wir nehmen an, dass Q nicht-leeres Inneres hat, andernfalls ist Q eine Nullmenge und die Aussage gilt trivialerweise. Nach dem Lebesgue-Kriterium (Satz 13.23 im Skript) ist eine beschränkte Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn f fast überall stetig ist. Es genügt deshalb zu zeigen: Ist f bei $x_0 \in Q$ stetig, so ist $f(x_0) = 0$. Sei im Gegenteil $x_0 \in Q$ ein Stetigkeitspunkt von f mit $f(x_0) > 0$. Für $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$ existiert dann ein offener Würfel $Q_\delta \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Zentrum x_0 und Kantenlänge $2\delta > 0$, sodass $f(x) > f(x_0) - \epsilon = \epsilon$ ist für alle $x \in Q \cap Q_\delta$. Dann gilt $f \geq \epsilon\, \mathbb{1}_{Q_\delta}$ auf Q und somit

$$\int_Q f \, d\operatorname{vol} \geq \int_Q \epsilon\, \mathbb{1}_{Q_\delta} \, d\operatorname{vol} = \epsilon \operatorname{vol}(Q \cap Q_\delta) > 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 11. Für eine Jordan-messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Flächeninhalt $\operatorname{vol}(B) > 0$ sind

$$x_B = \frac{1}{\operatorname{vol}(B)} \int_B x \, d\operatorname{vol}(x,y), \quad y_B = \frac{1}{\operatorname{vol}(B)} \int_B y \, d\operatorname{vol}(x,y)$$

die Koordinaten des Flächenschwerpunkts $z_B = (x_B, y_B)$ von B. Zeigen Sie:

(a) [**2 Punkte**] Ist $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ für paarweise disjunkte Jordan-messbare Mengen $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{vol}(B_1), \ldots, \operatorname{vol}(B_n) > 0$, so gilt

$$z_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{vol}(B_i)}{\operatorname{vol}(B)} z_{B_i}.$$

(b) [**4 Punkte**] Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Eckpunkten $o = (0,0)$, $p = (r, 0)$ und $q = (s,t)$, wobei $r, s, t > 0$, so ist $z_B = \frac{1}{3}(o + p + q)$.

Lösung: (a) Mit der Additivität des Integrals folgt

$$\mathrm{vol}(B)\, x_B = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} x \, d\,\mathrm{vol}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(B_i)\, x_{B_i}$$

und ebenso $\mathrm{vol}(B)\, y_B = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{vol}(B_i)\, y_{B_i}$.
(b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $\mathrm{vol}(B) = rt/2$. Mit dem Satz von Fubini erhält man

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{2}{rt} \int_0^t \frac{t-y}{t}\, r\, y \, dy = \left[\frac{y^2}{t} - \frac{2y^3}{3t^2}\right]_0^t = \frac{1}{3}\, t, \\ x_B &= \frac{2}{rt} \left(\int_0^s \frac{x}{s}\, t\, x\, dx + \int_s^r \frac{r-x}{r-s}\, t\, x\, dx \right) \\ &= \left[\frac{2x^3}{3rs}\right]_0^s + \left[\frac{x^2}{r-s} - \frac{2x^3}{3r(r-s)}\right]_s^r = \frac{1}{3}\,(r+s). \end{aligned}$$

Man beachte, dass der Ausdruck für x_B auch im Fall $s > r$ das Richtige liefert.

Aufgabe 12. [4 Punkte] Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Formel $\mathrm{div}(A^{-1} \circ f \circ A)(x) = \mathrm{div}(f)(Ax)$. *Hinweis: Spur.*

Lösung: Die Divergenz ist die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\mathrm{div}(f)(x) = \partial_1 f_1(x) + \ldots + \partial_n f_n(x) = \mathrm{tr}(D_x f).$$

Aufgrund der mehrdimensionalen Kettenregel und der Linearität von A gilt

$$\begin{aligned} D_x(A^{-1} \circ f \circ A) &= D_{Ax}(A^{-1} \circ f) \circ D_x A \\ &= D_{f(Ax)} A^{-1} \circ D_{Ax} f \circ D_x A \\ &= A^{-1} \circ D_{Ax} f \circ A. \end{aligned}$$

Da ausserdem $\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$ für alle $n \times n$-Matrizen B und C, folgt

$$\mathrm{div}(A^{-1} \circ f \circ A)(x) = \mathrm{tr}(A^{-1} \circ D_{Ax} f \circ A) = \mathrm{tr}(D_{Ax} f) = \mathrm{div}(f)(Ax)$$

wie gewünscht.
