D-MATH | Algebra II | FS 2023
Prof. Richard Pink

Serie 15

Elementarteilersatz, Moduln

1. Finde die Elementarteiler und die zugehörigen Matrizen U, V für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}.$$

2. Sei R ein Hauptidealring und betrachte natürliche Zahlen $1 \leqslant \ell \leqslant \min\{m,n\}$. Für jede $m \times n$-Matrix A über R sei $d_\ell(A)$ der grösste gemeinsame Teiler aller $\ell \times \ell$-Unterdeterminanten von A. Zeige, dass für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times n$-Matrix V über R gilt

$$d_\ell(A) \bigm| d_\ell(AV).$$

Folgere, dass die Elementarteiler von A bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt sind.

3. Betrachte einen Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ von Moduln über einem Ring R und einen Untermodul $L \subset M$. Beweise:

   (a) $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ ist ein Untermodul von M.

   (b) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist ein Untermodul von N.

   (c) φ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\varphi) = 0$ ist.

   (d) φ ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(\varphi) = N$ ist.

   (e) Formuliere und beweise die universelle Eigenschaft des Faktormoduls M/L.

   (f) *Homomorphiesatz:* Jeder Homomorphismus von R-Moduln $\varphi\colon M \to N$ induziert einen Isomorphismus von R-Moduln

$$M/\mathrm{Kern}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(\varphi),\ m + \mathrm{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(m).$$

Für die folgenden Aufgaben nennen wir eine Folge von Elementen $(m_1, \ldots, m_n)$ eines R-Moduls M eine *Basis von M*, wenn jedes Element von M auf eindeutige Weise als $a_1m_1 + \ldots + a_nm_n$ mit $a_i \in R$ darstellbar ist. Besitzt M eine Basis der Länge n, so ist M isomorph zu R^n, also frei vom Rang n.

4. Sei R ein Integritätsbereich. Für jeden R-Modul M heisst

$$M_{\text{tor}} := \{m \in M \mid \exists r \in R \smallsetminus \{0\} \colon \ rm = 0\}$$

der *Torsionsuntermodul* von M. Ist $M_{\text{tor}} = 0$, so heisst M *torsionsfrei.* Zeige:

(a) Die Menge M_{tor} ist ein Untermodul von M.

(b) Der Faktormodul M/M_{tor} ist torsionsfrei.

(c) Jeder freie Modul ist torsionsfrei.

Sei nun R ein Hauptidealring. Zeige:

(d) Ist M endlich erzeugt, so ist M/M_{tor} ein freier Modul.

(e) Ist M frei vom Rang $n < \infty$, so ist jeder Untermodul frei vom Rang $\leqslant n$.

**5. Sei R ein von Null verschiedener Ring und sei M ein R-Modul. Seien $m_1, \ldots, m_r$ Erzeugende von M, und seien $n_1, \ldots, n_s$ linear unabhängige Elemente von M.

(a) Zeige: Dann ist $s \leqslant r$.

(b) Zeige: Ist $s = r$, so ist M ein freier R-Modul.