D-MATH | Algebra II | FS 2023
Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 15

ELEMENTARTEILERSATZ, MODULN

1. Finde die Elementarteiler und die zugehörigen Matrizen U, V für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}.$$

Lösung: Durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen bringen wir A in Elementarteilerform D:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: D$$

Wir haben dabei A von links mit

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$$

und von rechts mit $V := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ multipliziert. Somit sind 1 und 3 die Elementarteiler von A und es ist

$$UAV = D.$$

2. Sei R ein Hauptidealring und betrachte natürliche Zahlen $1 \leqslant \ell \leqslant \min\{m, n\}$. Für jede $m \times n$-Matrix A über R sei $d_\ell(A)$ der grösste gemeinsame Teiler aller $\ell \times \ell$-Unterdeterminanten von A. Zeige, dass für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times n$-Matrix V über R gilt

$$d_\ell(A) \,\big|\, d_\ell(AV).$$

Folgere, dass die Elementarteiler von A bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt sind.

Lösung: Consider the $\ell \times \ell$-submatrix M of AV obtained by selecting the rows $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant m$ and the columns $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\ell \leqslant n'$. Then $M = A'V'$, where A' is the $\ell \times n$-matrix obtained from A by selecting the rows $i_1, \ldots, i_\ell$, and V' the $n \times \ell$-matrix obtained from V by selecting the columns $j_1, \ldots, j_\ell$. Let $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$

denote the column vectors of A', and write $V' = (v'_{jk})_{j,k}$. Then for each $1 \leqslant k \leqslant \ell$ the k-th column vector of $A'V'$ is equal to $\sum_{j=1}^{n} v'_{jk}\vec{x}_j$. Using the multilinearity of the determinant with respect to column vectors, we deduce that

$$\det(A'V') = \sum_{j_1,\ldots,j_\ell=1}^{n} \Big(\prod_{k=1}^{\ell} v'_{j_k k}\Big) \cdot \det(\vec{x}_{j_1},\ldots,\vec{x}_{j_\ell}).$$

Here $(\vec{x}_{j_1},\ldots,\vec{x}_{j_\ell})$ has determinant zero if some of the indices $j_1,\ldots,j_\ell$ are equal. Otherwise it is obtained by interchanging columns in an $\ell \times \ell$-submatrix of A', and hence of A, and its determinant is $\pm$ an $\ell \times \ell$-minor of A. Thus $\det(M)$ is an R-linear combination of $\ell \times \ell$-minors of A. It is therefore a multiple of $d_\ell(A)$. By varying M we deduce the desired result:

$$d_\ell(A) \,\big|\, d_\ell(AV). \tag{1}$$

The rest was sketched in the lecture, but here it is again. First, for any $V \in \mathrm{GL}_n(R)$ we deduce from (1) that $d_\ell(A) \mid d_\ell(AV) \mid d_\ell(AVV^{-1}) = d_\ell(A)$ and hence

$$d_\ell(A) \sim d_\ell(AV) \;\text{ for any }\; V \in \mathrm{GL}_n(R). \tag{2}$$

Next, since $\det(M) = \det(M^T)$ for any square matrix M, the definition of d_ℓ directly implies that

$$d_\ell(A) \sim d_\ell(A^T). \tag{3}$$

The computation $d_\ell(A) \sim d_\ell(A^T) \mid d_\ell(A^T U^T) = d_\ell((UA)^T) \sim d_\ell(UA)$ then shows that

$$d_\ell(A) \sim d_\ell(UA) \;\text{ for any }\; U \in \mathrm{GL}_m(R). \tag{4}$$

Combining (2) and (4) we therefore find that

$$d_\ell(A) \sim d_\ell(UAV) \;\text{ for any }\; U \in \mathrm{GL}_m(R) \;\text{ and }\; V \in \mathrm{GL}_n(R). \tag{5}$$

Finally let U and V be as provided by the elementary divisor theorem, and let $e_1|e_2|...|e_k$ be the elementary divisors of A. Then for any $1 \leqslant \ell \leqslant k$ the top left $\ell \times \ell$-minor of UAV is $e_1 \cdots e_\ell$ and all other $\ell \times \ell$-minors are multiples therof. Thus

$$d_\ell(A) \sim d_\ell(UAV) \sim e_1 \cdots e_\ell, \tag{6}$$

and therefore $e_1 \cdots e_\ell$ is uniquely determined up to $\sim$ by A. Since $e_1,\ldots,e_k$ are non-zero, it follows that each e_ℓ is unique up to $\sim$.

3. Betrachte einen Homomorphismus $\varphi\colon M \to N$ von Moduln über einem Ring R und einen Untermodul $L \subset M$. Beweise:

   (a) $\operatorname{Kern}(\varphi) := \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ ist ein Untermodul von M.

   (b) $\operatorname{Bild}(\varphi)$ ist ein Untermodul von N.

   (c) φ ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$ ist.

   (d) φ ist surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{Bild}(\varphi) = N$ ist.

   (e) Formuliere und beweise die universelle Eigenschaft des Faktormoduls M/L.

   (f) *Homomorphiesatz:* Jeder Homomorphismus von R-Moduln $\varphi\colon M \to N$ induziert einen Isomorphismus von R-Moduln

$$M/\operatorname{Kern}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bild}(\varphi),\ m + \operatorname{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(m).$$

Lösung:

   (a) Since $0 \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, it follows that $\operatorname{Kern}(\varphi) \neq \varnothing$. For all $m, m' \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, we have $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m') = 0 + 0 = 0$, so $m + m' \in \operatorname{Kern}(\varphi)$. Lastly, for all $x \in R$ and $m \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, we have $\varphi(xm) = x\varphi(m) = x \cdot 0 = 0$. Thus $xm \in \operatorname{Kern}(\varphi)$, and so $\operatorname{Kern}(\varphi) \subset M$ is a submodule.

   (b) Since $0 = \varphi(0) \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, we have $\operatorname{Bild}(\varphi) \neq \varnothing$. For $n, n' \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, there exist $m, m' \in M$ such that $\varphi(m) = n$ and $\varphi(m') = n'$. Then $n + n' = \varphi(m) + \varphi(m') = \varphi(m + m') \in \operatorname{Bild}(\varphi)$ and $xn = x\varphi(m) = \varphi(xm) \in \operatorname{Bild}(\varphi)$. Thus $\operatorname{Bild}(\varphi) \subset N$ is a submodule.

   (c) $\Rightarrow$: If there exists a non-zero $m \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ then $\varphi(m) = \varphi(0) = 0$, contradicting the injectivity of φ. Thus $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$.
   $\Leftarrow$: Let $m, m' \in M$ be such that $\varphi(m) = \varphi(m')$. Then $\varphi(m) - \varphi(m') = \varphi(m - m') = 0$. Since $\operatorname{Kern}(\varphi) = 0$, this implies $m - m' = 0$. Thus $m = m'$, and φ is injective.

   (d) This follows from the definition of surjectivity.

   (e) Die universelle Eigenschaft des Faktormoduls erhalten wir durch Anpassen der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums aus §5.11 der Zusammenfassung Lineare Algebra:

   Betrachte den surjektiven Homomorphismus $\pi\colon M \twoheadrightarrow M/L$, $m \mapsto m+L$. Für jeden R-Modul N und jeden Homomorphismus $f\colon M \to N$ mit $L \subset \operatorname{Kern}(f)$ existiert genau eine lineare Abbildung $\overline{f}\colon M/L \to N$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$, das heisst, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & M/L \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Um dies zu beweisen betrachte zunächst irgendein solches $\overline{f}$. Für alle $m \in M$ gilt dann $\overline{f}(m+L) = \overline{f}(\pi(m)) = f(m)$. Diese explizite Formel zeigt bereits, dass $\overline{f}$ eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt bleibt zu zeigen, dass diese Formel einen wohldefinierten Homomorphismus $M/L \to N$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$ definiert. Seien dafür $m, m' \in M$ mit $m + L = m' + L$. Dann ist $m' - m \in L \subset \mathrm{Kern}(f)$ und folglich $f(m' - m) = 0$, und daher

$$f(m') = f(m + (m' - m)) = f(m) + f(m' - m) = f(m) + 0 = f(m).$$

Also ist $\overline{f}$ durch die genannte Formel wohldefiniert. Schliesslich betrachten wir beliebige $m, m' \in M$ und $x \in R$ und rechnen

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}((m+L)+(m'+L)) & = & \overline{f}((m+m')+L)) \\ & = & f(m+m') \\ & = & f(m)+f(m') \\ & = & \overline{f}(m+L)+\overline{f}(m'+L) \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}(x(m+L)) & = & \overline{f}(xm+L) \\ & = & f(xm) \\ & = & xf(m) \\ & = & x\overline{f}(m+L) \end{array}$$

Somit ist $\overline{f}$ ein Homomorphismus mit der gesuchten Eigenschaft. □

(f) Setze $L := \mathrm{Kern}(\varphi)$. Die universelle Eigenschaft in (e) liefert dann einen eindeutigen R-Modul-Homomorphismus $\bar{\varphi}\colon M/L \to N$ with $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Für diesen gilt nach Konstruktion

$$\mathrm{Bild}(\bar{\varphi}) \ = \ \big\{\bar{\varphi}(m+L) \bigm| m \in M\big\} \ = \ \big\{\varphi(m) \bigm| m \in M\big\} \ = \ \mathrm{Bild}(\varphi).$$

Ausserdem ist

$$\bar{\varphi}(m+L) = 0 \ \Leftrightarrow \ \varphi(m) = 0 \ \Leftrightarrow \ m \in L \ \Leftrightarrow \ m + L = 0 + L,$$

und daher $\mathrm{Kern}(\bar{\varphi}) = 0$. Somit ist $\bar{\varphi}$ injektiv. Damit induziert $\bar{\varphi}$ einen injektiven und surjektiven Homomorphismus $M/L \to \mathrm{Bild}(\varphi)$, also einen Isomorphismus.

Für die folgenden Aufgaben nennen wir eine Folge von Elementen $(m_1, \ldots, m_n)$ eines R-Moduls M eine *Basis von* M, wenn jedes Element von M auf eindeutige Weise als $a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$ mit $a_i \in R$ darstellbar ist. Besitzt M eine Basis der Länge n, so ist M isomorph zu R^n, also frei vom Rang n.

4. Sei R ein Integritätsbereich. Für jeden R-Modul M heisst

$$M_{\mathrm{tor}} \;:=\; \{m \in M \mid \exists r \in R \smallsetminus \{0\}\colon\; rm = 0\}$$

der *Torsionsuntermodul* von M. Ist $M_{\mathrm{tor}} = 0$, so heisst M *torsionsfrei*. Zeige:

(a) Die Menge M_{tor} ist ein Untermodul von M.

(b) Der Faktormodul M/M_{tor} ist torsionsfrei.

(c) Jeder freie Modul ist torsionsfrei.

Sei nun R ein Hauptidealring. Zeige:

(d) Ist M endlich erzeugt, so ist M/M_{tor} ein freier Modul.

(e) Ist M frei vom Rang $n < \infty$, so ist jeder Untermodul frei vom Rang $\leqslant n$.

Lösung:

(a) Weil $1_R \cdot 0_M = 0_M$ gilt, ist $0_M \in M_{\mathrm{tor}}$, also ist M_{tor} nicht leer. Für $m, m' \in M_{\mathrm{tor}}$ existieren $r, r' \in R \smallsetminus \{0\}$ mit $rm = 0 = r'm'$. Weil R ein Integritätsbereich ist, ist $rr' \neq 0$ und es gilt $(rr') \cdot (m + m') = rr'm + rr'm' = r'(rm) + r(r'm) = 0$. Also ist $m + m' \in M_{\mathrm{tor}}$. Für jedes $x \in R$ ist dann auch $r(xm) = x(rm) = 0$, also ist $xm \in M_{\mathrm{tor}}$. Daher ist M_{tor} ein R-Untermodul von M.

(b) Sei $m + M_{\mathrm{tor}} \in (M/M_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{tor}}$. Dann existiert ein $r \in R \smallsetminus \{0\}$ mit $r(m + M_{\mathrm{tor}}) = rm + M_{\mathrm{tor}} = 0$, also mit $rm \in M_{\mathrm{tor}}$. Daher existiert ein $r' \in R \smallsetminus \{0\}$ mit $(r'r)m = r'(rm) = 0$. Weil R ein Integritätsbereich ist, ist $r'r \neq 0$ und daher $m \in M_{\mathrm{tor}}$. Dann ist aber $m + M_{\mathrm{tor}} = 0 + M_{\mathrm{tor}}$. Insgesamt zeigt dies $(M/M_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{tor}} = \{0\}$, also ist M/M_{tor} torsionsfrei.

(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M = R^n$. Betrachte ein Element $m = (a_1, \ldots, a_n) \in M_{\mathrm{tor}}$. Dann existiert $r \in R \smallsetminus \{0\}$ mit $rm = 0$, also mit $ra_i = 0$ für alle i. Da R ein Integritätsbereich ist, impliziert dies $a_i = 0$ für alle i und daher $m = 0$. Somit ist $M_{\mathrm{tor}} = \{0\}$.

(d) Wenn M endlich erzeugt ist, ist auch M/M_{tor} endlich erzeugt. Nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring existieren $r, k \geqslant 0$ und Elemente $e_1, \ldots, e_k \in R \smallsetminus (\{0\} \cup R^\times)$ mit

$$M/M_{\mathrm{tor}} \;\cong\; R^r \boxplus \bigboxplus_{i=1}^{k} R/(e_i).$$

Ist $k > 0$, so betrachte die Restklasse $\bar{1} := 1 + e_k R$ und das Nullelement $\bar{0} := 0 + e_k R$ in $R/e_k R$. Dann gilt $e_k \cdot \bar{1} = e_k + e_k R = \bar{0} \neq \bar{1}$; somit ist $\bar{1}$ ein von Null verschiedenes Torsionselement von $R/e_k R$. Unter dem obigen Isomorphismus entspricht dann das Tupel $(0, \ldots, 0, \bar{1})$ einem von Null verschiedenen Torsionselement von M/M_{tor}. Dies widerspricht der Aussage (b); folglich ist $k = 0$. Dann ist aber $M/M_{\mathrm{tor}} \cong R^r$ ein freier Modul, was zu zeigen war.

(e) Sei N ein Untermodul eines freien Moduls M vom Rang $n < \infty$. Nach (c) ist dann M torsionsfrei. Wegen $N_{\mathrm{tor}} = N \cap M_{\mathrm{tor}}$ ist dann auch N torsionsfrei. Andererseits wissen wir aus Proposition 4.10.1 der Vorlesung, dass N von n Elementen erzeugt ist. Nach Aufgabe 4 (d) ist folglich N frei, und zwar vom Rang $\leqslant n$.

Aliter: Wir passen den Beweis von Proposition 4.10.1 der Vorlesung an. Betrachte einen Untermodul $N \subset R^n$. Im Fall $n = 0$ ist $N = 0$ frei vom Rang 0. Andernfalls gelte die Aussage schon für $n - 1$. Betrachte die Abbildung

$$i \colon R^{n-1} \hookrightarrow R^n,\ (a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0).$$

Dann ist $N' := i^{-1}(N)$ ein Untermodul von R^n, nach Induktionsannahme ist er daher frei vom Rang $\leqslant n - 1$, sagen wir mit der Basis $m'_1, \ldots, m'_s$ für $s \leqslant n - 1$. Ist $i(N') = N$, so ist dann auch N frei vom Rang s mit der Basis $i(m'_1), \ldots, i(m'_s)$. Andernfalls betrachte die Projektionsabbildung

$$p \colon R^n \twoheadrightarrow R,\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_n.$$

Dann ist $p(N)$ ein von Null verschiedener Untermodul von R, das heisst, ein von Null verschiedenes Ideal. Schreibe $p(N) = Ry$ mit einem $y \in R \setminus \{0\}$. Da R ein Integritätsbereich ist, bildet y dann schon eine Basis von $p(N)$. Wähle ein beliebiges Element $m_n \in N$ mit $p(m_n) = y$. In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass dann N von den Elementen $i(m'_1), \ldots, i(m'_s), m_n$ erzeugt wird. Eine weitere schnelle Rechnung zeigt, dass diese Elemente auch linear unabhängig sind. Somit ist N frei vom Rang $s + 1 \leqslant n$ mit der Basis $i(m'_1), \ldots, i(m'_s), m_n$.

**5. Sei R ein von Null verschiedener Ring und sei M ein R-Modul. Seien $m_1, \ldots, m_r$ Erzeugende von M, und seien $n_1, \ldots, n_s$ linear unabhängige Elemente von M.

(a) Zeige: Dann ist $s \leqslant r$.

(b) Zeige: Ist $s = r$, so ist M ein freier R-Modul.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung haben wir einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi\colon R^r \twoheadrightarrow M, \quad (x_i)_i \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^r x_i m_i.$$

und einen injektiven Homomorphismus

$$\psi\colon R^s \hookrightarrow M, \quad (y_j)_j \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^s y_j n_j.$$

Schreibe jedes $n_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} m_i$ mit $a_{ij} \in R$ und betrachte die $r \times s$-Matrix $A := (a_{ij})_{i,j}$. Nach Konstruktion ist dann

$$L_A\colon R^s \to R^r, \quad \underline{y} \mapsto A\underline{y}$$

ein Homomorphismus mit $\varphi \circ L_A = \psi$. Da ψ injektiv ist, ist dann auch L_A injektiv.

Nehmen wir an, es sei $s > r$. Betrachte den injektiven Homomorphismus

$$\iota\colon R^r \hookrightarrow R^s, \quad \underline{x} \mapsto \tbinom{x}{0}.$$

Dann ist auch $\iota \circ L_A\colon R^s \to R^s$ ein injektiver Homomorphismus und gleich der Linksmultiplikation L_B mit der um Nullen ergänzten $s \times s$-Matrix $B := \binom{A}{O}$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist nun B Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms. Insbesondere existiert ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ mit $f(B) = O_s$. Sei $f(X) = \sum_{i=0}^k b_i X^i$ ein solches von minimalem Grad.

Im Fall $k = 0$ ist $f = 1$ und folglich $I_s = f(B) = O_s$. Dann ist $1 = 0$ in R, was aber wegen $R \neq 0$ bereits ausgeschlossen ist. Somit ist $k > 0$. Ist nun $b_0 = 0$, so muss also $f(X) = Xg(X)$ sein mit einem normierten Polynom $g \in R[X]$ von kleinerem Grad. Aus $f(B) = O_s$ folgt dann $L_B \circ g(L_B) = f(L_B) = 0$. Da $L_B = \iota \circ L_A$ injektiv ist, folgt daraus auch $g(L_B) = 0$ und daher $g(B) = O_s$. Dies widerspricht der Minimalität von f. Somit ist $b_0 \neq 0$.

Schliesslich werfen wir einen genaueren Blick auf die Gleichung

$$\textstyle\sum_{i=0}^k b_i B^i \;=\; f(B) \;=\; O_s.$$

Da die letzte Zeile von B identisch verschwindet, gilt dasselbe auch für die Matrizen B^i für alle $i > 0$, also für alle Summanden ausser $b_0 B^0 = b_0 I_s$. Wegen $b_0 \neq 0$ verschwindet dessen letzte Zeile aber nicht. Dies liefert einen Widerspruch; also war die Annahme $s > r$ falsch.

(b) Seien jetzt $s = r$ und φ, ψ, A wie oben, und setze $N := \mathrm{Kern}(\varphi)$. Die Injektivität von $\psi = \varphi \circ L_A$ ist dann äquivalent zur Injektivität von L_A zusammen mit $N \cap L_A(R^r) = \{0\}$. Es genügt zu zeigen, dass $N = \{0\}$ ist, weil φ dann ein Isomorphismus ist. Nehmen wir also $N \neq \{0\}$ an.

Wir konstruieren eine Folge von Untermoduln von R^r durch $N_0 := \{0\}$ und $N_{i+1} := N + L_A(N_i)$ für alle $i \geqslant 0$. Im Induktionsschritt gilt dabei immer

$N \cap L_A(N_i) \subset N \cap L_A(R^r) = 0$; somit haben wir eine direkte Summe $N_{i+1} = N \oplus L_A(N_i)$. Wir behaupten, dass $N_i \subsetneqq N_{i+1}$ ist für alle $i \geqslant 0$. Für $i = 0$ gilt dies wegen $N_0 = \{0\} \subsetneqq N = N_1$. Gilt es für ein $i \geqslant 0$, so folgt es wegen der Injektivität von L_A auch für $i+1$ durch

$$N_{i+1} \; = \; N \oplus L_A(N_i) \; \subsetneqq \; N \oplus L_A(N_{i+1}) \; = \; N_{i+2}.$$

Somit haben wir eine unendliche strikt aufsteigende Folge von Untermoduln $N_0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq \ldots$ von R^n.

Ist nun R noethersch, so weiss man, dass R^n ein noetherscher R-Modul ist, das heisst, dass jede aufsteigende Folge von Untermoduln stationär wird. In diesem Fall erhalten wir also einen Widerspruch und der Satz ist bewiesen.

Den allgemeinen Fall reduzieren wir auf den noetherschen Fall wie folgt. Wähle ein von Null verschiedenes Element $c = (c_i)_i \in N$. Sei R' der von allen a_{ij} und c_i über $\mathbb{Z}$ erzeugte Unterring von R. Nach Konstruktion hat dann A Koeffizienten in R', und c erzeugt einen von Null verschiedenen R'-Untermodul $N' \subset (R')^r$ mit $N' \subset N$. Aus der Injektivität von $L_A \colon R^r \to R^r$ folgt dann direkt auch die Injektivität von $L_A \colon (R')^r \to (R')^r$. Ausserdem folgt wegen $N' \cap L_A((R')^r) \subset N \cap L_A(R^r) = \{0\}$ auch $N' \cap L_A((R')^r) = 0$. Somit gelten über R' dieselben Voraussetzungen wie gehabt. Nun ist aber R' eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra und daher ein Faktorring eines Polynomrings in endlich vielen Variablen über $\mathbb{Z}$. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist letzterer noethersch, also ist auch R' noethersch. Wiederum haben wir also einen Widerspruch, und der Satz ist allgemein bewiesen.

Für mehr dazu siehe Chapter 1, §1D von T. Y. Lam, Lectures on Modules and Rings, Springer-Verlag 1999.