Serie 16

Moduln über Hauptidealringen, Jordansche Normalform

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ wie in Aufgabe 1 der Serie 15. Gib einen expliziten Isomorphismus von $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ auf ein direktes Produkt von zyklischen $\mathbb{Z}$-Moduln an.

2. (a) Bestimme alle Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{Z}$-Moduln der Kardinalität 600.

   (b) Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{F}_2[X]$-Moduln der Kardinalität 16.

3. Zeige, dass die Elementarteiler $e_1, \ldots, e_n$ eines endlich erzeugten Moduls M über einem Hauptidealring R bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt sind.

   Hinweis: Für beliebiges $e \in R \setminus \{0\}$ untersuche die minimale Anzahl der Erzeugenden des Untermoduls eM in Abhängigkeit von den Elementarteilern von M.

*4. Sei K ein Körper. Für zwei $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $A \sim A'$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $UAU^{-1} = A'$. Für zwei Paare von $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $(A, B) \sim (A', B')$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = (A', B')$.

   (a) Für geeignetes n finde vier $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$ und $A'B' = B'A'$ und $A \sim A'$ und $B \sim B'$, aber $(A, B) \not\sim (A', B')$.

   (b) Konstruiere $K[X, Y]$-Moduln M und M' von endlicher Dimension über K, die isomorph als $K[X]$- und als $K[Y]$-Moduln sind, aber nicht als $K[X, Y]$-Moduln.

*5. Sei φ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige:

(a) Es existieren ein diagonalisierbarer Endomorphismus φ_s und ein nilpotenter Endomorphismus φ_n mit $\varphi_s\varphi_n = \varphi_n\varphi_s$ und $\varphi_s + \varphi_n = \varphi$.

(b) Diese sind durch φ eindeutig bestimmt.

(c) Beide können durch Polynome in φ mit Koeffizienten in K ausgedrückt werden.

Hinweis: Die Zerlegung $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ heisst die *Jordan-Chevalley-Zerlegung von* φ. Dabei heisst φ_s der *halbeinfache* und φ_n der *nilpotente Anteil* von φ.

6. (a) Beweise die Existenz der Jordan-Chevalley-Zerlegung mit Hilfe der Jordanschen Normalform.

(b) Konstruiere die Jordan-Chevalley-Zerlegung für den durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

repräsentierten Endomorphismus von $\mathbb{C}^3$.