Musterlösung Serie 16

Moduln über Hauptidealringen, Jordansche Normalform

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ wie in Aufgabe 1 der Serie 15. Gib einen expliziten Isomorphismus von $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ auf ein direktes Produkt von zyklischen $\mathbb{Z}$-Moduln an.

   Lösung: Nach Aufgabe 4 der Serie 6 ist $UAV = D$ mit

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nach dem Beweis des Haupsatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen ist also $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \boxplus \mathbb{Z}$. Um einen expliziten Isomorphismus anzugeben, bemerken wir zunächst, dass der surjektive Homomorphismus

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \boxplus \mathbb{Z} \\ (a,b,c) & \longmapsto & (b+3\mathbb{Z},\ c) \end{array}$$

   den Kern $\{(a,3b,0) \in \mathbb{Z}^3 \mid a,b \in \mathbb{Z}\} = D\mathbb{Z}^2$ hat. Wegen $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ und $V \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ist daher

$$\mathrm{Kern}(\pi \circ U) \;=\; U^{-1}\,\mathrm{Kern}(\pi) \;=\; U^{-1}D\mathbb{Z}^2 \;=\; U^{-1}DV^{-1}\mathbb{Z}^2 \;=\; A\mathbb{Z}^2.$$

   Wir haben also folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(\pi \circ U) = A\mathbb{Z}^2 \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}^3 \arrow[d, "U", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi\circ U"] & \\
 & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \boxplus \mathbb{Z} \\
\mathrm{Kern}(\pi) = D\mathbb{Z}^2 \arrow[r, hook] & \mathbb{Z}^3 \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

   Nach dem Homomorphiesatz induziert daher der surjektive Homomorphismus $\pi\circ U$ den gewünschten Isomorphismus, der nach der obigen Darstellung von U explizit gegeben ist durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \boxplus \mathbb{Z}, \\ (a,b,c) + A\mathbb{Z}^2 & \longmapsto & (5a-4b+3\mathbb{Z},\ a-2b+c). \end{array}$$

2. (a) Bestimme alle Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{Z}$-Moduln der Kardinalität 600.
   (b) Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{F}_2[X]$-Moduln der Kardinalität 16.

Lösung: (a) Jeder endliche $\mathbb{Z}$-Modul ist insbesondere endlich erzeugt, nach dem Struktursatz also isomorph zu

$$\mathbb{Z}^r \boxplus \boxed{+}_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}/p_i^{\nu_i}\mathbb{Z}$$

für Primzahlen p_i und Exponenten ν_i. Die Endlichkeit impliziert dabei $r = 0$, und die Kardinalität ist dann $\prod_{i=1}^{\ell} p_i^{\nu_i}$. Wegen $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ tauchen nur die Primzahlen $2, 3, 5$ auf, und für ihre Exponenten kommen nur die Zerlegungen $3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$ beziehungsweise 1 beziehungsweise $2 = 1 + 1$ in Frage. Mit der Abkürzung $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ergibt das insgesamt die 6 verschiedenen Isomorphieklassen

$$\begin{aligned}
Z_8 \times Z_3 \times Z_{25} &\cong Z_{600}, \\
Z_8 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5 &\cong Z_5 \times Z_{120}, \\
Z_4 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_{25} &\cong Z_2 \times Z_{300}, \\
Z_4 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5 &\cong Z_{10} \times Z_{60}, \\
Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_{25} &\cong Z_2 \times Z_2 \times Z_{150}, \\
Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_5 \times Z_5 &\cong Z_2 \times Z_{10} \times Z_{30}.
\end{aligned}$$

(b) Bekanntlich ist $R := \mathbb{F}_2[X]$ zusammen mit der Gradfunktion ein euklidischer Ring. Betrachte zunächst ein beliebiges $f \in R \setminus \{0\}$. Wegen Division mit Rest besitzt jede Restklasse in R/fR einen eindeutigen Repräsentanten vom Grad $< \deg(f)$. Die Kardinalität von R/fR ist daher gleich der Anzahl der Elemente von R vom Grad $< \deg(f)$, das heisst der Polynome der Form $a_0 + \ldots + a_{\deg(f)-1}X^{\deg(f)-1}$ mit allen $a_i \in \mathbb{F}_2$. Diese Anzahl ist offenbar $2^{\deg(f)}$.

Sei nun M ein R-Modul der Kardinalität 16. Nach dem Struktursatz ist dann

$$M \;\cong\; R^r \boxplus \boxed{+}_{i=1}^{k} R/e_iR$$

mit $r, k \geqslant 0$ und Elementarteilern $e_i \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$ mit $e_1|\ldots|e_k$. Dabei ist jedes e_i normiert wegen $R^\times = \mathbb{F}_2^\times = \{1\}$; somit sind $r, k, e_1, \ldots, e_k$ alle eindeutig bestimmt. Weiter ist dann

$$|M| \;=\; |R|^r \cdot \prod_{i=1}^{\ell} 2^{\deg(e_i)};$$

also gilt $|M| = 16$ genau dann, wenn $r = 0$ und $\sum_{i=1}^{\ell} \deg(e_i) = 4$ ist. Wegen $R^\times \not\ni e_1|\ldots|e_k \neq 0$ gilt dabei $1 \leqslant \deg(e_1) \leqslant \ldots \leqslant \deg(e_k)$; für diese Grade gibt es daher genau die Fälle

$$4,\;\; 1+3,\;\; 2+2,\;\; 1+1+2,\;\; 1+1+1+1.$$

Im Fall 4 gibt es genau einen Elementarteiler e_1 vom Grad 4, wofür es genau 16 Möglichkeiten gibt.

Im Fall 1 + 3 hat der erste Elementarteiler e_1 den Grad 1, wofür es genau 2 Möglichkeiten gibt. Der zweite Elementarteiler e_2 muss ein Vielfaches von e_1 sein, das heisst, wir haben $e_2 = fe_1$ mit $f \in R$ vom Grad 2. Für dieses f gibt es genau 4 Möglichkeiten; die Gesamtzahl der Möglichkeiten in diesem Fall ist daher $2 \cdot 4 = 8$.

Im Fall 2 + 2 hat der erste Elementarteiler e_1 den Grad 2, wofür es genau 4 Möglichkeiten gibt. Der zweite Elementarteiler e_2 muss hier gleich e_1 sein; somit ist die Gesamtzahl in diesem Fall gleich 4.

Im Fall 1 + 1 + 2 hat der erste Elementarteiler e_1 den Grad 1, wofür es genau 2 Möglichkeiten gibt. Sodann brauchen wir $e_2 = e_1$ und $e_3 = fe_2$ mit $f \in R$ vom Grad 1. Für dieses f gibt es genau 2 Möglichkeiten; die Gesamtzahl der Möglichkeiten in diesem Fall ist daher $2 \cdot 2 = 4$.

Im Fall 1 + 1 + 1 + 1 hat der erste Elementarteiler e_1 den Grad 1, wofür es genau 2 Möglichkeiten gibt. Sodann brauchen wir $e_1 = e_2 = e_3 = e_4$; also ist die Gesamtzahl in diesem Fall gleich 2.

Die gesuchte Zahl von Isomorphieklassen für M ist somit $16 + 8 + 4 + 4 + 2 = 34$.

3. Zeige, dass die Elementarteiler $e_1, \ldots, e_n$ eines endlich erzeugten Moduls M über einem Hauptidealring R bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt sind.

   Hinweis: Für beliebiges $e \in R \smallsetminus \{0\}$ untersuche die minimale Anzahl der Erzeugenden des Untermoduls eM in Abhängigkeit von den Elementarteilern von M.

   Lösung: Seien $r, k \geqslant 0$ und $e_i \in R \smallsetminus (\{0\} \cup R^\times)$ mit $e_1 | \ldots | e_k$, so dass M isomorph zu $R^r \boxplus \boxplus_{i=1}^k R/(e_i)$ ist.

   Für beliebiges $e \in R \smallsetminus \{0\}$ sei $j(e)$ die Anzahl der $1 \leqslant i \leqslant k$ mit $e_i | e$. Wegen $e_1 | \ldots | e_k$ gilt also $e_i | e$ genau dann, wenn $i \leqslant j(e)$ ist. Für alle $i \leqslant j(e)$ ist dann $(e) \subset (e_i)$ und folglich $e \cdot (R/(e_i)) = 0$. Für $j(e) < i \leqslant k$ ist dagegen $(e, e_i) = (e_i')$ für einen echten Teiler e_i' von e_i, und mit $e_i = y_i e_i'$ folgt

$$e \cdot (R/(e_i)) \;=\; (e, e_i)/(e_i) \;=\; (e_i')/(e_i) \;\cong\; R/(y_i) \;\neq\; 0.$$

   Wegen $e \neq 0$ ist ausserdem $eR \cong R$ als R-Modul. Zusammen impliziert dies

$$(*) \qquad eM \;\cong\; R^r \boxplus \bigboxplus_{j(e) < i \leqslant k} R/(y_i).$$

   Für alle $j(e) < i < k$ gilt nun $(e_{i+1}) \subset (e_i)$; also induziert die Identität einen surjektiven Homomorphismus $R/(e_{i+1}) \twoheadrightarrow R/(e_i)$. Dieser induziert weiter einen surjektiven Modulhomomorphismus

$$R/(y_{i+1}) \;\cong\; e \cdot (R/(e_{i+1})) \;\twoheadrightarrow\; e \cdot (R/(e_i)) \;\cong\; R/(y_i).$$

Somit gilt $y_i | y_{i+1}$. Die rechte Seite von $(*)$ hat daher genau die Form der rechten Seite im Klassifikationssatz für endlich erzeugte R-Moduln. Nach dem Zusatz (b) aus der Vorlesung ist die minimale Anzahl von Erzeugenden von $e \cdot M$ daher gleich $r + k - j(e)$. Da wir aus der Vorlesung ausserdem wissen, dass r und k eindeutig bestimmt sind, ist die Zahl $j(e)$ folglich für jedes $e \in R \smallsetminus \{0\}$ eindeutig bestimmt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Zahlen $j(e)$ die Elementarteiler bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmen. Betrachte dafür $e'_i \in R \smallsetminus (\{0\} \cup R^\times)$ mit $e'_1 | \ldots | e'_k$, so dass M auch isomorph zu $R^r \boxplus \boxplus_{i=1}^k R/(e'_i)$ ist. Für jedes $1 \leqslant i' \leqslant k$ zeigt die Eindeutigkeit von $j(e_{i'})$ dann

$$\big|\{1 \leqslant i \leqslant k : e'_i | e_{i'}\}\big| \;=\; \big|\{1 \leqslant i \leqslant k : e_i | e_{i'}\}\big| \;\geqslant\; i'.$$

Wegen $e'_1 | \ldots | e'_k$ impliziert dies $e'_{i'} | e_{i'}$. Dasselbe Argument umgekehrt zeigt $e_{i'} | e'_{i'}$, und insgesamt folgt daraus $e_{i'} \sim e'_{i'}$, wie zu zeigen war.

*4. Sei K ein Körper. Für zwei $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $A \sim A'$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $UAU^{-1} = A'$. Für zwei Paare von $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $(A, B) \sim (A', B')$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = (A', B')$.

(a) Für geeignetes n finde vier $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$ und $A'B' = B'A'$ und $A \sim A'$ und $B \sim B'$, aber $(A, B) \not\sim (A', B')$.

(b) Konstruiere $K[X, Y]$-Moduln M und M' von endlicher Dimension über K, die isomorph als $K[X]$- und als $K[Y]$-Moduln sind, aber nicht als $K[X, Y]$-Moduln.

Lösung: (a) Nimm $n = 2$ und $A := A' := B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B' := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alle diese Matrizen sind zueinander ähnlich; insbesondere gilt $A \sim A'$ und $B \sim B'$. Ausserdem kommutieren alle diese Matrizen miteinander. Sodann ist der Eigenraum von $A = A'$ zum Eigenwert 1 gleich $\left(\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Auf diesem operiert B durch Multiplikation mit 1 und B' durch Multiplikation mit 0. Wäre nun $(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = (A', B')$, dann wäre $UAU^{-1} = A' = A$ und daher $U\left(\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} * \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Darauf operierte dann aber UBU^{-1} wieder durch Multiplikation mit 1, die Matrix B' dagegen nicht. Somit kann nicht $UBU^{-1} = B'$ sein, Widerspruch.

(b) Betrachte $n \times n$-Matrizen A, B mit $AB = BA$. Dann wird $M := K^n$ zu einem $K[X, Y]$-Modul vermöge der skalaren Multiplikation

$$K[X, Y] \times K^n \to K^n, \;\; \Big(\textstyle\sum'_{i,j} a_{ij} X^i Y^j, v\Big) \mapsto \textstyle\sum'_{i,j} a_{ij} A^i B^j v.$$

(Nachrechnen! Beachte, dass die Bedingung $AB = BA$ wirklich nötig ist.)

Betrachte nun ein zweites Paar von $n \times n$-Matrizen A', B' mit $A'B' = B'A'$ und mache $M' := K^n$ zu einem $K[X, Y]$-Modul mit diesen Matrizen anstelle von A, B.

Ein Isomorphismus von $K[X,Y]$-Moduln $\varphi\colon M \xrightarrow{\sim} M'$ ist dann ein Isomorphismus von K-Vektorräumen mit $\varphi(Av) = A'\varphi(v)$ und $\varphi(Bv) = B'\varphi(v)$ für alle $v \in K^n$. Repräsentieren wir diesen Isomorphismus durch eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$, so werden die Bedingungen äquivalent zu $UA = A'U$ und $UB = B'U$, das heisst, zu $(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = (A', B')$. Mit derselben Rechnung entspricht ein Isomorphismus von $K[X]$-Moduln $M \xrightarrow{\sim} M'$ einfach einer Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UAU^{-1} = A'$, und ein Isomorphismus von $K[Y]$-Moduln $M \xrightarrow{\sim} M'$ einer Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $UBU^{-1} = B'$.

Für $A, B, A'B'$ wie in (a) erhalten wir daher $K[X,Y]$-Moduln M und M' mit den gewünschten Eigenschaften. Die obige Wahl von Matrizen liefert konkret

$$\begin{aligned} M &\cong K[X,Y]/(X-1, Y-1) \boxplus K[X,Y]/(X,Y), \\ M' &\cong K[X,Y]/(X-1, Y) \boxplus K[X,Y]/(X, Y-1). \end{aligned}$$

*5. Sei φ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige:

(a) Es existieren ein diagonalisierbarer Endomorphismus φ_s und ein nilpotenter Endomorphismus φ_n mit $\varphi_s\varphi_n = \varphi_n\varphi_s$ und $\varphi_s + \varphi_n = \varphi$.

(b) Diese sind durch φ eindeutig bestimmt.

(c) Beide können durch Polynome in φ mit Koeffizienten in K ausgedrückt werden.

Hinweis: Die Zerlegung $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ heisst die *Jordan-Chevalley-Zerlegung von* φ. Dabei heisst φ_s der *halbeinfache* und φ_n der *nilpotente Anteil* von φ.

Lösung:

(a) Schreibe das charakteristische Polynom von φ in der Form

$$\mathrm{char}_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{N_i}$$

mit $N_i \geqslant 1$ und paarweise verschiedenen $\lambda_i \in K$. Dann sind die Faktoren $(X - \lambda_i)^{N_i}$ für $i = 1, \ldots, r$ paarweise teilerfremd. Nach dem chinesischen Restsatz haben wir also einen Ringisomorphismus

$$K[X]/(\mathrm{char}_\varphi(X)) \xrightarrow{\sim} \boxplus_{i=1}^{r} K[X]/((X - \lambda_i)^{N_i}).$$

Es existiert also ein $f(X) \in K(X)$ mit

$$f(X) + (\mathrm{char}_\varphi(X)) \mapsto \left(\lambda_1 + (X - \lambda_1)^{N_1}, \ldots, \lambda_r + (X - \lambda_r)^{N_r}\right).$$

Für alle $1 \leqslant i \leqslant r$ existieren dann Polynome $g_i \in K[X]$, so dass $f(X) = \lambda_i + g_i(X)(X-\lambda_i)^{N_i}$ gilt. Setze $\varphi_s := f(\varphi)$ und $\varphi_n := \varphi - \varphi_s$ in $\mathrm{End}_k(V)$. Dann gilt $\varphi_s + \varphi_n = \varphi$ und $\varphi_s\varphi_n = f(\varphi)(\varphi - f(\varphi)) = (\varphi - f(\varphi)f(\varphi) = \varphi_n\varphi_s$, da φ mit sich selbst und Konstanten kommutiert. Weiter gilt für jeden Hauptraum $\mathrm{Hau}_{\lambda_i} := \mathrm{Kern}((\varphi - \lambda_i)^{N_i})$

$$\varphi_s|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = f(\varphi)|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = \lambda_i|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} + g_i(\varphi)(\varphi - \lambda_i)^{N_i}|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = \lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}}.$$

Wegen $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hau}_{\lambda_i}$ ist φ_s also diagonalisierbar. Ausserdem zeigt dies

$$\varphi_n|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = \varphi|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} - \varphi_s|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = (\varphi - \lambda_i)|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}}.$$

Daraus folgt $\varphi_n^{N_i}|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = (\varphi - \lambda_i)^{N_i}|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = 0$. Mit $N := \max\{N_1, \ldots, N_r\}$ gilt folglich $\varphi_n^N|_{\mathrm{Hau}_{\lambda_i}} = 0$, und wegen $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Hau}_{\lambda_i}$ dann schon überhaupt $\varphi_n^N = 0$. Somit ist φ_n nilpotent.

(b) Seien $\varphi_s := f(\varphi)$ und $\varphi_n := \varphi - \varphi_s$ wie in der Lösung zu (a), und sei (ψ_s, ψ_n) ein weiteres Paar von Endomorphismen, die die Bedingung in (a) erfüllen. Dann kommutieren ψ_s und ψ_n mit $\psi_s + \psi_n = \varphi$ und folglich auch mit $\varphi_s = f(\varphi)$ und $\varphi_n = \varphi - \varphi_s$.

Insbesondere kommutieren φ_s und ψ_s. Da beide separat diagonalisierbar sind, sind sie also auch gemeinsam diagonalisierbar. Eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren diagonalisiert dann auch den Endomorphismus $\omega := \varphi_s - \psi_s$.

Ausserdem kommutieren φ_n und ψ_n. Nach Voraussetzung existiert $N \geqslant 1$ mit $\varphi_n^N = \psi_n^N = 0$. Daraus folgt

$$(\psi_n - \varphi_n)^{2N} = \sum_{k=0}^{2M} \tbinom{2M}{k} \psi_n^k (-1)^{2M-k} \varphi_n^{2M-k} = 0,$$

wobei die letzte Gleichung daraus folgt, dass $2M - k \geqslant M$ oder $k \geqslant M$ für alle k erfüllt ist. Also ist $\psi_n - \varphi_n$ nilpotent.

Aus $\psi_s + \psi_n = \varphi = \varphi_s + \varphi_n$ folgt nun aber $\omega = \psi_s - \varphi_s = \psi_n - \varphi_n$. Wir haben gesehen, dass dieser Endomorphismus sowohl diagonalisierbar als auch nilpotent ist. Also ist er diagonalisierbar mit dem einzigen Eigenwert 0 und somit die Nullabbildung. Also ist $\varphi_s = \psi_s$ und $\varphi_n = \psi_n$.

(c) Für φ_s und φ_n aus (a) gilt die Aussage nach Konstruktion und nach (b) gilt sie somit immer.

6. (a) Beweise die Existenz der Jordan-Chevalley-Zerlegung mit Hilfe der Jordanschen Normalform.

(b) Konstruiere die Jordan-Chevalley-Zerlegung für den durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

repräsentierten Endomorphismus von $\mathbb{C}^3$.

Lösung:

(a) Sei B eine geordnete Basis von V, so dass die Darstellungsmatrix $J := {}_B[\varphi]_B$ Jordannormalform hat. Da K algebraisch abgeschlossen ist, ist J also eine Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken der Form $\lambda I_j + N_j$ für gewisse Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ und gewisse $j \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$ sowie der $j \times j$-Matrix

$$N_j := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Sei D die Diagonalmatrix mit den entsprechenden Blöcken λI_j, und sei N die strikte obere Dreiecksmatrix mit den entsprechenden Blöcken N_j. Seien φ_s und φ_n die Endomorphismen mit ${}_B[\varphi_s]_B = D$ und ${}_B[\varphi_n]_B = N$. Nach Konstruktion ist dann φ_s diagonalisierbar und φ_n nilpotent. Weiter kommutieren λI_j und N_j; also kommutieren D und N; und darum kommutieren auch φ_s und φ_n. Wegen ${}_B[\varphi_s+\varphi_n]_B = D+N = J = {}_B[\varphi]_B$ ist ausserdem $\varphi_s+\varphi_n = \varphi$. Diese Zerlegung erfüllt daher alle verlangten Bedingungen.

(b) Die Jordannormalform von A ergibt sich zu

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Zerlegung entspricht also der Zerlegung $A = A_s + A_n$ mit

$$A_s = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A_n = A - A_s = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$