Serie 17

Einfache Gruppen, Subnormalreihen, Kompositionsreihen

1. Eine Untergruppe $H < G$, welche unter allen Automorphismen von G in sich übergeht, heisst eine *charakteristische Untergruppe von G*.

   (a) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

   (b) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Diedergruppe D_4.

   (c) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Quaternionengruppe Q.

2. Für welche $n \geqslant 4$ ist die A_n von allen Konjugierten von $\sigma := (1\ 2)(3\ 4)$ erzeugt?

**3. Zeige, dass für jeden Körper K und jedes $n \geqslant 2$ die Gruppe

$$\mathrm{PSL}(n, K) := \mathrm{SL}_n(K)/\{\lambda I_n \colon \lambda \in K^\times,\ \lambda^n = 1\}$$

einfach ist, ausser im Fall $n = 2$ und $|K| \leqslant 3$. *Hinweis:*

   (a) Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K)$ von den Matrizen der Form $I_n + \lambda E_{ij}$ für alle $i \neq j$ und alle $\lambda \in K$ erzeugt ist, wobei E_{ij} die Elementarmatrix mit dem Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und allen übrigen Einträgen 0 bezeichnet.

   (b) Im Fall $n \geqslant 3$ benutze Kommutatoren von Elementen wie in (a) um zu zeigen, dass die $\mathrm{SL}_n(K)$ ihre eigene Kommutatorgruppe ist.

   (c) Im Fall $n = 2$ und $|K| > 3$ benutze dafür zusätzlich noch Diagonalmatrizen.

   (d) Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K)$ zweifach transitiv auf der Menge $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ aller eindimensionalen Unterräume von K^n operiert.

   (e) Folgere, dass jede normale Untergruppe $N \lhd \mathrm{SL}_n(K)$, welche eine nicht-skalare Matrix enthält, transitiv auf $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ operiert.

   (f) Schliesse, dass jede solche Untergruppe N gleich $\mathrm{SL}_n(K)$ ist.

4. (a) Gib eine Kompositionsreihe der Diedergruppe D_{12} an.

   (b) Finde alle Kompositionsreihen der Diedergruppe D_4.

   (c) Sei p eine Primzahl. Finde eine Kompositionsreihe der Matrixgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

5. Die *absteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $G^{[0]} := G$ und

$$G^{[m+1]} := [G, G^{[m]}] := \big\langle \big\{ [g, g'] \mid g \in G,\ g' \in G^{[m]} \big\} \big\rangle.$$

Existiert ein m mit $G^{[m]} = 1$, so heisst G *nilpotent*.

(a) Zeige, dass jedes $G^{[m]}$ die höhere Kommutatorgruppe $G^{(m)}$ enthält.

(b) Folgere, dass jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.

(c) Zeige, dass die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ mit allen Diagonaleinträgen 1 nilpotent ist.

(d) Zeige, dass die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(K)$ auflösbar, aber nicht nilpotent ist, wenn $|K| > 2$ ist.

(e) Zeige, dass jede Untergruppe und Faktorgruppe einer nilpotenten Gruppe auch nilpotent ist.

*6. Die *aufsteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $Z_0 := 1$ und

$$Z_{i+1} := \{ z \in G \mid \forall g \in G \colon [g, z] \in Z_i \}.$$

(a) Zeige, dass für alle $i \geqslant 0$ gilt $Z_i \lhd G$.

(b) Zeige, dass G genau dann nilpotent ist, wenn ein n existiert mit $Z_n = G$.