Musterlösung Serie 17

Einfache Gruppen, Subnormalreihen, Kompositionsreihen

1. Eine Untergruppe $H < G$, welche unter allen Automorphismen von G in sich übergeht, heisst eine *charakteristische Untergruppe von G*.

   (a) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

   (b) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Diedergruppe D_4.

   (c) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Quaternionengruppe Q.

Lösung: Every characteristic subgroup $H < G$ is an $\mathrm{Aut}(G)$-invariant subset and therefore a union of $\mathrm{Aut}(G)$-orbits. In each case we therefore first identify all $\mathrm{Aut}(G)$-orbits in G. Furthermore, for any $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ and any $g \in G$ we have $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$; hence any two elements of the same $\mathrm{Aut}(G)$-orbit have the same order. We also note that $\{e\}$ and G are always characteristic subgroups of G.

(a) For $G := (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ we have $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. For any element $\binom{a}{b} \in G$ we have $2\binom{a}{b} = \binom{2a}{2b}$ and $4\binom{a}{b} = \binom{4a}{4b} = \binom{0}{0}$. Thus

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ has order } \begin{cases} 1 & \text{if } \binom{a}{b} = \binom{0}{0}, \\ 2 & \text{if } \binom{a}{b} \in (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \smallsetminus \left\{\binom{0}{0}\right\}, \\ 4 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Claim: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ transitively permutes the elements of order 2, resp. of order 4.

To see this consider any element $\binom{a}{b}$ of order 4. Then at least one of a, b is equal to ± 1. Set $g := \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$ if $a = \pm 1$ and $g := \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ otherwise. In both cases we have $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ and $g\binom{1}{0} = \binom{a}{b}$. Thus $\binom{a}{b}$ lies in the same orbit as $\binom{1}{0}$; hence all elements of order 4 lie in this orbit.

Likewise, we can write any element of order 2 in the form $\binom{2a}{2b}$ for an element $\binom{a}{b}$ of order 4. The above $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ then also satisfies $g\binom{2}{0} = \binom{2a}{2b}$; thus $\binom{2a}{2b}$ lies in the same orbit as $\binom{2}{0}$; and hence all elements of order 2 lie in this orbit.

We conclude that there are three orbits of the action $\mathrm{Aut}(G)$ on G, namely the set $\{\binom{0}{0}\}$, the set of elements of order 2 and the set of elements of order 4.

Claim: The characteristic subgroups of $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ are precisely G and $\{0\}$ and the subgroup $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

Indeed, any characteristic subgroup must always contain the neutral element $\binom{0}{0}$. If it contains an element $\binom{a}{b}$ of order 4, it also contains the element $\binom{2a}{2b}$ of order 2. Together this leaves only the indicated possibilities, and these are indeed subgroups.

(b) Recall that $D_4 = \{1, T, T^2, T^3, S, ST, ST^2, ST^3\}$, where T is a fundamental rotation and S is a reflection through an axis of symmetry of the square.

For any $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ consider the map

$$D_4 \to D_4, \quad T^j \mapsto T^j, \quad ST^j \mapsto ST^{j+i}.$$

By explicit calculation using the relation $STS^{-1} = T^{-1}$ we show that this is a homomorphism. Being bijective, it is therefore an automorphism of D_4. For any two reflections ST^j and $ST^{j'}$ we can find an automorphism φ of this form with $\varphi(ST^j) = ST^{j'}$. Thus any orbit of $\mathrm{Aut}(D_4)$ in D_4 which contains one reflection contains all reflections. Hence any characteristic subgroup of D_4 which contains a reflection contains S and ST, which generate D_4. Thus the only characteristic subgroup containing a reflection is D_4 itself.

It remains to determine the characteristic subgroups containing only rotations. If such a subgroup contains one of $T^{\pm 1}$, it also contains the other, and then it is the subgroup $\langle T \rangle$. Since $T^{\pm 1}$ are the only elements of order 4, this subgroup is in fact characteristic. Moreover, since $\langle T^2 \rangle$ is the only subgroup of order 2 of the characteristic subgroup $\langle T \rangle$, it is itself characteristic. Therefore the characteristic subgroups of D_4 that contain only rotations are precisely $\langle T \rangle$ and $\langle T^2 \rangle$ and the trivial subgroup.

(c) By the solution to exercise 5 of sheet 2, the subgroups of Q are 1, $\langle -1 \rangle$, $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, $\langle k \rangle$, and Q. The homomorphism of Q defined by

$$\begin{aligned} \pm 1 &\to \pm 1 \\ \pm i &\to \pm j \\ \pm j &\to \pm k \\ \pm k &\to \pm i \end{aligned}$$

is an automorphism. By construction it sends $\langle i \rangle$ to $\langle j \rangle$ to $\langle k \rangle$ to $\langle i \rangle$. Thus none of these subgroups is characteristic. Since $\langle -1 \rangle$ is the only subgroup of order 2, it is invariant under every automorphism of Q and hence characteristic. In summary, the characteristic subgroups of Q are therefore $\{1\}$, $\langle -1 \rangle$, and Q.

Remark: In fact $Z(D_4) = \langle T^2 \rangle$ and $Z(Q) = \langle -1 \rangle$, and the center of a group is always a characteristic subgroup.

2. Für welche $n \geqslant 4$ ist die A_n von allen Konjugierten von $\sigma := (1\ 2)(3\ 4)$ erzeugt?

   Lösung: Wir bemerken zunächst, dass $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ ist und somit σ und alle seine Konjugierten in A_n enthalten sind. Die von allen Konjugierten von σ erzeugte Untergruppe N ist daher in A_n enthalten. Aus der Abgeschlossenheit unter Konjugation der angegebenen erzeugenden Menge folgt, dass N ein Normalteiler von A_n ist. Wegen $\sigma \in N$ ist N ausserdem nicht trivial.

   Da die A_n für $n \geqslant 5$ einfach ist, erhalten wir in diesem Fall $N = A_n$. Dagegen besteht im Fall $n = 4$ die Konjugationsklasse von σ aus den 3 Elementen $(1\ 2)(3\ 4)$ und $(1\ 3)(2\ 4)$ und $(1\ 4)(2\ 3)$, welche zusammen mit dem Einselement die Kleinsche Vierergruppe bilden. In diesem Fall ist diese somit gleich N und eine echte Untergruppe von A_n. Somit ist die A_n genau dann von allen Konjugierten von σ erzeugt, wenn $n \geqslant 5$ ist.

**3. Zeige, dass für jeden Körper K und jedes $n \geqslant 2$ die Gruppe

$$\mathrm{PSL}(n, K) := \mathrm{SL}_n(K)/\{\lambda I_n \colon \lambda \in K^\times,\ \lambda^n = 1\}$$

einfach ist, ausser im Fall $n = 2$ und $|K| \leqslant 3$. *Hinweis:*

(a) Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K)$ von den Matrizen der Form $I_n + \lambda E_{ij}$ für alle $i \neq j$ und alle $\lambda \in K$ erzeugt ist, wobei E_{ij} die Elementarmatrix mit dem Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und allen übrigen Einträgen 0 bezeichnet.

(b) Im Fall $n \geqslant 3$ benutze Kommutatoren von Elementen wie in (a) um zu zeigen, dass die $\mathrm{SL}_n(K)$ ihre eigene Kommutatorgruppe ist.

(c) Im Fall $n = 2$ und $|K| > 3$ benutze dafür zusätzlich noch Diagonalmatrizen.

(d) Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(K)$ zweifach transitiv auf der Menge $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ aller eindimensionalen Unterräume von K^n operiert.

(e) Folgere, dass jede normale Untergruppe $N \lhd \mathrm{SL}_n(K)$, welche eine nicht-skalare Matrix enthält, transitiv auf $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ operiert.

(f) Schliesse, dass jede solche Untergruppe N gleich $\mathrm{SL}_n(K)$ ist.

Lösung: Der erste vollständige Beweis dieser Aussage findet sich in

- Iwasawa, K.: *Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen.* Proceedings of the Imperial Academy (3), vol 17. Tokyo: The Japan Academy, 1941.

Dieser Artikel ist in deutscher Sprache verfasst und lässt sich abrufen unter

`https://projecteuclid.org/euclid.pja/1195578881`

4. (a) Gib eine Kompositionsreihe der Diedergruppe D_{12} an.
   (b) Finde alle Kompositionsreihen der Diedergruppe D_4.
   (c) Sei p eine Primzahl. Finde eine Kompositionsreihe der Matrixgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

Lösung:

(a) Sei D_{12} erzeugt von der Drehung T der Ordnung 12 und der Spiegelung S, also $D_{12} = \{1, T, \ldots, T^{11}, S, ST, \ldots, ST^{11}\}$. Die Untergruppe $\langle T \rangle$ der Drehungen ist vom Index 2 in D_{12} und somit normal. Da $\langle T \rangle$ abelsch ist, sind sämtliche Untergruppen dieser Gruppe normal in $\langle T \rangle$. Deshalb ist zum Beispiel

$$D_{12} \rhd \langle T \rangle \rhd \langle T^3 \rangle \rhd \langle T^6 \rangle \rhd \{1\}$$

eine Subnormalreihe. Deren Faktorgruppen haben die Primzahlordnungen $2, 3, 2, 2$ und sind daher alle einfach. Somit ist dies eine Kompositionsreihe von D_{12}.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass D_{12} insgesamt 11 verschiedene Kompositionsreihen hat. Weitere Kompositionsreihen sind beispielsweise

$$\begin{array}{ccccccccc} D_{12} & \rhd & \langle T \rangle & \rhd & \langle T^2 \rangle & \rhd & \langle T^6 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_{12} & \rhd & \langle T \rangle & \rhd & \langle T^2 \rangle & \rhd & \langle T^4 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_{12} & \rhd & \langle T^2, S \rangle & \rhd & \langle T^4, S \rangle & \rhd & \langle T^4 \rangle & \rhd & \{1\}. \end{array}$$

(b) Write $D_4 = \{1, T, T^2, T^3, S, ST, ST^2, ST^3\}$ with a rotation T and a reflection S. As D_4 is solvable of order 2^3, the largest proper subgroup in a composition series must have index 2. Any such subgroup contains T^2, and the factor group $D_4/\langle T^2 \rangle \cong C_2^2$ possesses three subgroups of index 2. Lifting them to D_4 shows that D_4 has the following three subgroups of index 2:

$$\begin{array}{rcl} \langle T \rangle & \cong & C_4, \\ \langle T^2, S \rangle & \cong & C_2^2, \\ \langle T^2, ST \rangle & \cong & C_2^2. \end{array}$$

Having index 2, each of these is normal in D_4. The next term in the composition series must and can be any subgroup of order 2 of this one. For $\langle T \rangle$ there exists only one choice $\langle T^2 \rangle$, for the others three. Altogether this yields the following 7 composition series

$$\begin{array}{ccccccc} D_4 & \rhd & \langle T \rangle & \rhd & \langle T^2 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, S \rangle & \rhd & \langle T^2 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, S \rangle & \rhd & \langle S \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, S \rangle & \rhd & \langle ST^2 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, ST \rangle & \rhd & \langle T^2 \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, ST \rangle & \rhd & \langle ST \rangle & \rhd & \{1\}, \\ D_4 & \rhd & \langle T^2, ST \rangle & \rhd & \langle ST^3 \rangle & \rhd & \{1\}. \end{array}$$

(c) Wir betrachten die Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}, \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

von G. Es gilt $|G| = p^3$ und $|G_1| = p^2$ und $|G_2| = p$. Nach Lagrange folgt daher $[G : G_1] = [G_1 : G_2] = p$. Da die Ordnungen von G und G_1 Potenzen von p sind, folgt mit Aufgabe 2 der Serie 3, dass G_1 normal in G und G_2 normal in G_1 ist (alternativ sieht man das für $G_1 < G$ auch mit einer leichten Rechnung, für $G_2 < G_1$ mit der Tatsache, dass G_1 abelsch ist). Somit ist die Reihe

$$G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \{1\}$$

eine Subnormalreihe von G. Da deren Subfaktoren als Gruppen von Primzahlordnung einfach sind, ist sie eine Kompositionsreihe von G.

5. Die *absteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $G^{[0]} := G$ und

$$G^{[m+1]} := [G, G^{[m]}] := \big\langle \big\{ [g, g'] \;\big|\; g \in G,\ g' \in G^{[m]} \big\} \big\rangle.$$

Existiert ein m mit $G^{[m]} = 1$, so heisst G *nilpotent*.

(a) Zeige, dass jedes $G^{[m]}$ die höhere Kommutatorgruppe $G^{(m)}$ enthält.

(b) Folgere, dass jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.

(c) Zeige, dass die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ mit allen Diagonaleinträgen 1 nilpotent ist.

(d) Zeige, dass die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(K)$ auflösbar, aber nicht nilpotent ist, wenn $|K| > 2$ ist.

(e) Zeige, dass jede Untergruppe und Faktorgruppe einer nilpotenten Gruppe auch nilpotent ist.

Lösung: (a) For $m = 0$, we have $G^{[0]} = G = G^{(0)}$. Now take $m \geqslant 0$ and suppose that $G^{(m)} < G^{[m]}$. Then for all $g, g' \in G^{(m)}$ we have $g \in G$ and $g' \in G^{[m]}$ and hence $[g, g'] \in G^{[m+1]}$. As these elements generate $G^{(m+1)}$ it follows that $G^{(m+1)} < G^{[m+1]}$. The result follows by induction.

(b) We have seen that a group G is solvable if and only if one of its higher commutator groups is trivial. If G is nilpotent, there exists an $m \geqslant 0$ such that $G^{[m]} = 1$. By part (a), this implies that $G^{(m)} = 1$, so G is solvable.

(c) For each $1 \leqslant k \leqslant n$ consider the subgroup

$$U_k \;:=\; \big\{ (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(R) \;\big|\; a_{ij} = \delta_{ij} \text{ for all } i > j - k \big\}.$$

Then $U := U_1$ is the group of upper triangular matrices with all diagonal entries 1. We claim that $U^{[m]} < U_{m+1}$ for all m. For $m = 0$ this is clear. Suppose that $m > 1$

and that $U^{[m-1]} < U_m$. Then $U^{[m]} = [U_1, U^{[m-1]}] < [U_1, U_m]$, so it suffices to show that $[U_1, U_m] < U_{m+1}$.

Lemma. Let $a = (a_{ij})_{ij} \in U_1$ and $b = (b_{ij})_{ij} \in U_m$, and write $ab = (c_{ij})_{ij}$ and $ba = (d_{ij})_{ij}$. Then $c_{ij} = d_{ij}$ for all $n \geqslant i > j - (m+1)$.

Beweis. Let i be as in the statement of the lemma. We have $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ and $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$. Since $b_{kj} = \delta_{kj}$ for $k > j - m$, it follows that

$$c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{j-m} a_{ik} b_{kj} + b_{jj} a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-m} a_{ik} b_{kj} + a_{ij}.$$

Now $a_{ik} = 0$ whenever $i > k$. Since $i > j - (m+1)$, the terms in the sum are zero except in the case $i = j - m$, where the sum reduces to $a_{(j-m)(j-m)} b_{(j-m)j} = b_{(j-m)j}$. Thus

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{if } i > j - m, \\ b_{(j-m)j} + a_{ij} & \text{if } i = j - m. \end{cases}$$

Since $b_{ik} = \delta_{ik}$ if $i > k - m$, we have

$$d_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=i+m}^n b_{ik} a_{kj} + a_{ij}.$$

Now $i > j - (m+1) \iff i + m \geqslant j$. Since $a_{kj} = 0$ for $k > j$ it follows similarly as above that the terms in the sum are zero except in the case $i = j - m$, yielding

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{if } i > j - m, \\ b_{(j-m)j} + a_{ij} & \text{if } i = j - m. \end{cases}$$

$\square$

Now for a and b as in the lemma, we have $[a, b] \in U_{m+1}$ if and only if $ab = ba$ modulo U_{m+1}. This is equivalent to the statement proved in the lemma. Since a and b are arbitrary, it follows that $U^{[m]} < [U_1, U_m] < U_{m+1}$ and the claim holds by induction. In particular, for $m = n - 1$ we have $U^{[n-1]} < U_n = \{1\}$, so $U^{[n-1]}$ is trivial; hence U is nilpotent.

(d) Let $G < \mathrm{GL}_2(K)$ be the group of upper triangular matrices. We have seen in the course that G is solvable. Let $U_1 \lhd G$ be as defined in the solution to (c) above. Then G/U_1 is isomorphic the the group $T < \mathrm{GL}_2$ of diagonal matrices. In particular G/U_1 is abelian, and so $G^{[1]} \overset{\text{def}}{=} [G, G] \lhd U_1$ by Serie 3, Aufgabe 3(b). Since $|K| > 2$, we can choose an element $a \in K \smallsetminus \{0, 1\}$. Consider $t := \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in T$. For any element $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in U_1$ a direct calculation yields $[t, u] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & (a-1)b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Since $a - 1 \neq 0$, any element of U_1 arises in this way for some choice of b. Thus $U_1 \subset [T, U_1]$. In particular $U_1 \subset [G, G] = G^{[1]}$ and therefore $G^{[1]} = U_1$. It also follows that $U_1 \subset [G, U_1] \subset U_1$ and hence $G^{[2]} \overset{\text{def}}{=} [G, U_1] = U_1$. By induction it follows that $G^{[m]} = U_1$ for all $m \geqslant 1$, and G is not nilpotent.

(e) Let H be a subgroup of a nilpotent group G. We claim that $H^{[m]} < G^{[m]}$ for each $m \geqslant 0$. This is clear for $m = 0$. Suppose $m > 0$ and that $H^{[m-1]} < G^{[m-1]}$. By definition $H^{[m]}$ is generated by commutators $[h, h']$ with $h \in H$ and $h' \in H^{[m-1]}$. But then $h' \in G^{[m-1]}$ by assumption. Since $h \in G$, it follows that $[h, h'] \in G^{[m]}$; hence $H^{[m]} < G^{[m]}$. The claim follows by induction. Since G is nilpotent, there exists an m such that $G^{[m]} = \{1\}$. But then $H^{[m]} = \{1\}$ as well, so H is nilpotent.

Now let $N \lhd G$, and consider the quotient group G/N. From the definitions it follows that $(G/N)^{[m]} = G^{[m]}N/N$. Since the $G^{[m]}$ are eventually trivial, it follows immediately that the $(G/N)^{[m]}$ are as well. Hence G/N is nilpotent.

*6. Die *aufsteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $Z_0 := 1$ und

$$Z_{i+1} := \{z \in G \mid \forall g \in G\colon [g, z] \in Z_i\}.$$

(a) Zeige, dass für alle $i \geqslant 0$ gilt $Z_i \lhd G$.

(b) Zeige, dass G genau dann nilpotent ist, wenn ein n existiert mit $Z_n = G$.

Lösung: (a) We have $Z_0 = \{1\} \lhd G$. Suppose $i > 0$ and Z_{i-1} is normal in G. From the definition, it follows that $z \in Z_i$ if and only if its image in G/Z_{i-1} is in $Z(G/Z_{i-1})$. Since $Z(G/Z_{i-1})$ is normal in G/Z_{i-1}, the subset Z_i is therefore the kernel of the quotient map $G \mapsto \big(G/Z_{i-1}\big)/\big(Z(G/Z_{i-1})\big)$. It is therefore a normal subgroup of G. The result follows by induction.

(b) If G is nilpotent, we can fix an integer n such that $G^{[n]} = \{1\}$. We then claim that $G^{[n-i]} < Z_i$ for all $0 \leqslant i \leqslant n$. For $i = 0$ we have $G^{[n]} = \{1\} = Z_0$. Suppose the claim holds for some given $i \geqslant 0$. By the definition of $G^{[n-i]}$ for all $z \in G^{[n-i-1]}$ and all $g \in G$ we then have $[g, z] \in G^{[n-i]} < Z_i$. By the definition of Z_{i+1} this means that $z \in Z_{i+1}$. Thus $G^{[n-i-1]} < Z_{i+1}$, and so the claim follows for all i by induction. In particular, for $i = n$ we find that $G^{[0]} = G < Z_n$, so $Z_n = G$.

Conversely, suppose there exists an n such that $Z_n = G$. Again we claim that $G^{[n-i]} < Z_i$ for all $0 \leqslant i \leqslant n$, but this time we proceed by reverse induction on i. For $i = n$, we have $G^{[0]} = G = Z_n$. Let $i < n$ and suppose that $G^{[n-(i+1)]} < Z_{i+1}$. Then $G^{[n-i]} = [G, G^{[n-(i+1)]}] < [G, Z_{i+1}]$. The definition of Z_{i+1} means that $[g, z] \in Z_i$ for all $g \in G$ and $z \in Z_{i+1}$. Thus $G^{[n-i]} < [G, Z_{i+1}] < Z_i$ and the claim follows. In particular, for $i = 0$ we find that $G^{[n]} < Z_0 = \{1\}$, so $G^{[n]} = \{1\}$ and G is nilpotent.