Serie 18

Semidirekte Produkte, p-Gruppen

1. Sei σ ein n-Zykel in S_n.
   (a) Bestimme den Zentralisator $\mathrm{Cent}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$.
   (b) Bestimme den Normalisator $\mathrm{Norm}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$ als semidirektes Produkt, mit Gruppenordnung und Struktur.

2. (a) Bestimme die Gruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{\times}$.
   (b) Bestimme die Isomorphieklassen aller Gruppen der Ordnung 16, welche ein semidirektes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 8 mit einer Gruppe der Ordnung 2 sind.

3. Für welche Primzahlen p, q ist jedes semidirekte Produkt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ein direktes Produkt?

4. Zeige, dass jede p-Gruppe nilpotent ist.

5. (a) Sei G eine p-Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert, mit der Fixpunktmenge $X^G := \{x \in X \mid \forall g \in G\colon gx = x\}$. Zeige $|X| \equiv |X^G| \mod p$.
   (b) Sei K ein endlicher Körper der Ordnung p^m, und sei $G < \mathrm{GL}_n(K)$ eine p-Gruppe. Sei $U < \mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen 1. Zeige, dass ein $h \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $hGh^{-1} < U$.

6. Zeige, dass jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8 zur D_4 oder zur Quaternionengruppe isomorph ist.

7. Betrachte eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n.
   (a) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung p^n von n Elementen erzeugt ist.
   (b) Gibt es eine Gruppe der Ordnung p^n, die nicht von $n-1$ Elementen erzeugt ist?