Serie 19

Sylowsätze und Gruppen kleiner endlicher Ordnung

1. Zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung pqr für paarweise verschiedene Primzahlen p, q, r auflösbar ist.

2. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 561 zyklisch ist.

3. (a) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^k m$ für eine Primzahl p und natürliche Zahlen k und m mit $p \nmid m$ und $m > 1$. Zeige: Falls ein Normalteiler $N \lhd G$ der Ordnung m existiert, so ist G ein semidirektes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen.

   (b) Zeige, dass eine endliche abelsche Gruppe genau dann ein direktes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen ist, wenn sie nicht zyklisch von Primpotenzordnung ist.

   (c) Bestimme alle Gruppen ungerader Ordnung < 60, die kein semidirektes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen sind.

4. Sei p eine Primzahl.

   (a) Bestimme die Anzahl der p-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_p.

   (b) Folgere daraus den *Satz von Wilson*:

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod (p).$$

*5. Betrachte einen endlichen Körper K mit $q := p^m$ Elementen für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $m \geqslant 1$.

   (a) Finde eine p-Sylowuntergruppe P in $\mathrm{GL}_n(K)$ und bestimme ihre Ordnung.

   (b) Bestimme den Normalisator von P und seine Ordnung.

   (c) Folgere daraus und mit Aufgabe 5 der Serie 18 die Sylowsätze für $\mathrm{GL}_n(K)$ und die Primzahl p.

6. Bestimme für jeden Primteiler von $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)|$ eine Sylowuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)$.

**7. Zeige, dass die Ikosaedergruppe, das heisst die Gruppe aller Drehsymmetrien eines regelmässigen Ikosaeders, isomorph zu A_5 ist.