Serie 20

Sylowsätze und kleine Gruppen, Körperhomomorphismen, Zerfällungskörper

1. (a) Zeige, dass jede endliche Gruppe G mit einer nicht-trivialen zyklischen 2-Sylowuntergruppe eine normale Untergruppe vom Index 2 hat.

   Hinweis: Betrachte G als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(G)$ nach dem Satz von Cayley und achte auf das Vorzeichen.

   (b) Folgere daraus, dass eine nicht-abelsche endliche Gruppe der Ordnung $\equiv 2 \mod 4$ nicht einfach sein kann.

2. Zeige, dass jede Gruppe der folgenden Ordnung auflösbar ist:

   (a) $|G| = 4 \cdot 3 \cdot 7$.

   (b) $|G| = 16 \cdot 5$

   (c) $|G| = 8 \cdot 5 \cdot 7$

   **(d) $|G| = 16 \cdot 5 \cdot 7$

   **(e) $|G| = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$

*3. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ eine normale Untergruppe der Ordnung 17 hat.

   Hinweis: Finde eine 13-Sylowgruppe P und eine 17-Sylowgruppe Q von G mit $Q < \mathrm{Norm}_G(P)$ und untersuche dann $\mathrm{Norm}_G(Q)$.

**4. (a) Zeige, dass es keine nicht-abelsche einfache Gruppe mit $60 < |G| < 168$ gibt.

   (b) Zeige, dass jede einfache Gruppe der Ordnung 168 isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ ist.

5. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene dritte Wurzeln von 2 und sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Bestimme alle Körperhomomorphismen

   (a) $\mathbb{Q}(a, i) \to \mathbb{C}$.

   (b) $\mathbb{Q}(a, b) \to \mathbb{C}$.

6. Zeige, dass $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ der einzige Körperendomorphismus von $\mathbb{R}$ ist.

7. (a) Beweise, dass $(X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1)$ und $X^5 - 3X^3 + X^2 - 3$ dieselben Zerfällungskörper K über $\mathbb{Q}$ haben, und finde $[K/\mathbb{Q}]$.

   (b) Bestimme den Grad eines Zerfällungskörpers des Polynoms $X^3 + X^2 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_2$.

8. Zeige: Für jeden Zerfällungskörper L eines Polynoms vom Grad n über einen Körper K ist der Körpergrad $[L/K]$ ein Teiler von $n!$.