D-MATH | Algebra II | FS 2023
Prof. Richard Pink

Serie 21

Algebraischer Abschluss, Separable Polynome

1. Zeige: Sind L/K eine algebraische und M/L eine beliebige Körpererweiterung, so ist M ein algebraischer Abschluss von L genau dann, wenn M ein algebraischer Abschluss von K ist.

2. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K eine mit der Eigenschaft, dass jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ über L in Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.

   (*Hinweis:* Später werden wir sehen, dass es sogar genügt, dass jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ eine Nullstelle in L hat.)

3. Sei L/K eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst der *relative algebraische Abschluss von K in L*. Zeige:

   (a) Die Menge $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, der über K algebraisch ist.

   (b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

   (c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

   (*d) Sei $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der relative algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}}/\overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

*4. Zeige, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

*5. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss eines unendlichen Körpers K. Zeige $|\overline{K}| = |K|$.

*6. Zeige, dass eine endliche einfache Körpererweiterung $K(a)/K$ nur endlich viele Zwischenkörper K' besitzt.

   (*Hinweis:* Untersuche das Minimalpolynom von a über K'.)

7. Sei $h \in K[X]$ ein grösster gemeinsamer Teiler zweier Polynome $f, g \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. Zeige: Für jeden Oberkörper L/K ist h auch ein grösster gemeinsamer Teiler von f und g in $L[X]$.

8. Für welche Primzahlen p ist das Polynom $f(X) := X^3 + X + 3 \in \mathbb{F}_p[X]$ separabel?