Serie 23

Separable, inseparable, normale Körpererweiterungen

1. Finde ein primitives Element der Erweiterung L von K in den folgenden Fällen:
   (a) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
   (b) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

2. Beweise die folgende Proposition aus der Vorlesung: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ der Charakteristik $p > 0$ ist M/K rein inseparabel genau dann, wenn M/L und L/K rein inseparabel sind.

3. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeige: Ist $[L/K]$ teilerfremd zu p, so ist L/K separabel.

*4. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K und setze
$$L' \;:=\; \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$
Zeige:
   (a) L' ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, welcher separabel über K ist.
   (b) Ist $L' \neq L$, so ist $p := \mathrm{char}(K) > 0$ und für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in L'$. (Man nennt L/L' dann *rein inseparabel.*)
   (c) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist jede separable algebraische Körpererweiterung von L' trivial. (Man nennt L' dann *separabel abgeschlossen.*)

**5. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K mit der Eigenschaft, dass jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ eine Nullstelle in L hat. Zeige, dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.

Hinweis: Benutze den Satz vom primitiven Element und die obige Aufgabe 4.

6. Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine normale Hülle.
   (a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$
   (b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

7. Beweise oder widerlege: Jede rein inseparable algebraische Erweiterung L/K ist normal.

*8. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Körper der über $\mathbb{Q}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.